Sorbonne Université 2022 – 2023
Probabilités approfondies – MU4MA011 5 janvier 2023

# Examen

*Le sujet fait trois pages.*
*L'examen dure trois heures.*
*Les quatre exercices sont indépendants.*
*Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.*
*Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 points.*

## Exercice 1

*Barème indicatif : 12 points (2+2+2+2+4).*

Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y = \min(X, \frac{1}{2})$.
**1.** Calculer $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{2})$. La loi de $Y$ admet-elle une densité ?
**2.** Déterminer la loi de $Y$.
**3.** Calculer l'espérance de $Y$.
**4.** Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$.
**5.** Calculer soigneusement $\mathbb{E}[X|Y]$.

## Solution de l'exercice 1

1. On calcule

$$\mathbb{P}(Y = \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(\min(X, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(X \geqslant \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(X \in [\tfrac{1}{2}, 1]) = \frac{1}{2}.$$

Si la loi de $Y$ admettait une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on aurait $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{2}) = 0$, ce qui n'est pas le cas. Elle n'en admet donc pas.

La question était légèrement ambigüe, car elle ne précisait pas par rapport à quelle mesure on se demandait si la loi de $Y$ admet une densité. Il était implicite que c'était par rapport à la mesure de Lebesgue. Néanmoins, j'ai lu dans quelques copies une réponse comme "La loi de $Y$ est absolument continue par rapport à $\lambda + \delta_{\frac{1}{2}}$, où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$". J'ai jugé cette réponse satisfaisante, car elle montrait que les personnes avaient compris de quoi il retournait. Une réponse encore plus tautologique aurait été "La loi de $Y$ est absolument continue par rapport à elle-même", mais personne ne l'a donnée.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}[f(\min(X, \tfrac{1}{2}))] = \int_0^1 f(\min(x, \tfrac{1}{2}))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\tfrac{1}{2})\,\mathrm{d}x,$$

si bien que

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} f(\tfrac{1}{2}). \tag{1}$$

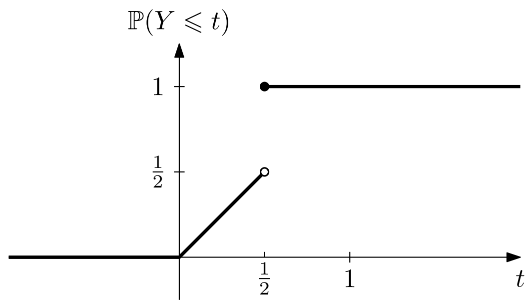
Notons $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La loi de $Y$ est donc

$$\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}\lambda + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}.$$

On peut également décrire la loi de $Y$ en décrivant sa fonction de répartition. Ainsi, pour tout réel $t$, on a

$$\mathbb{P}(Y \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \end{cases}$$

et le graphe de cette fonction a l'allure représentée ci-dessous.




Beaucoup d'erreurs d'inattention ont été commises sur la valeur au point $\frac{1}{2}$ de la fonction de répartition.

3. Pour calculer l'espérance de $Y$, on applique le calcul fait à la question précédente à la fonction $f$ donnée par $f(x) = x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, si bien que $f(Y) = Y$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{\frac{1}{2}} x\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Ce calcul a donné lieu à beaucoup d'erreurs. Une erreur fréquemment commise consistait à oublier un des facteurs $\frac{1}{2}$ dans le deuxième terme de la somme, et conduisait au résultat $\frac{5}{8}$. Il était possible de voir que ce résultat ne pouvait être correct en observant que la variable aléatoire $Y$ est, par définition, bornée supérieurement par $\frac{1}{2}$, et ne pouvait donc avoir une espérance strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

4. La variable aléatoire $Y$ est définie comme une fonction de $X$. Elle est donc mesurable par rapport à $\sigma(X)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[Y|X] = Y.$$

5. Pour calculer $\mathbb{E}[X|Y]$, donnons-nous une fonction mesurable bornée $g$ et calculons $\mathbb{E}[Xg(Y)]$. Nous trouvons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Xg(Y)] &= \int_0^1 x\,g(\min(x,\tfrac{1}{2}))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\,g(\tfrac{1}{2})\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{3}{8}\,g(\tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$

Définissons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $h(t) = t$ si $t < \frac{1}{2}$, et $h(t) = \frac{3}{4}$ si $t \geqslant \frac{1}{2}$. Alors, grâce à (1), nous avons

$$\mathbb{E}[h(Y)g(Y)] = \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}h(\tfrac{1}{2})g(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} x\,g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\,g(\tfrac{1}{2})$$

que nous reconnaissons comme étant $\mathbb{E}[Xg(Y)]$. Finalement,

$$\mathbb{E}[X|Y] = h(Y) = Y\mathbf{1}_{\{Y<\frac{1}{2}\}} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{Y\geqslant\frac{1}{2}\}}.$$

Cette question, qui n'était pas facile, a été peu traitée, et rarement correctement.

## Exercice 2

*Barème indicatif : 20 points (2+4+4+3+4+3).*

Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$, on se donne une martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$. On suppose que $X_0 = 0$ et que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$.

**1.** Montrer que pour tous entiers $0 \leqslant n \leqslant p$, on a $\mathbb{E}\big[(X_p - X_n)^2\big] \leqslant \mathbb{E}\big[X_p^2\big]$.

On fait l'hypothèse qu'il existe une constante réelle $C \geqslant 0$ telle que

$$\forall n \geqslant 0, \quad \mathbb{E}\big[X_n^2\big] \leqslant Cn.$$

Pour tout entier $\ell \geqslant 0$, on pose

$$M_\ell = \max_{2^\ell \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1}} \frac{|X_n - X_{2^\ell}|}{2^\ell}.$$

**2.** En appliquant une inégalité maximale de Doob, montrer qu'il existe une constante $C'$ telle que pour tout entier $\ell \geqslant 0$ et tout réel $a > 0$, on ait

$$\mathbb{P}(M_\ell \geqslant a) \leqslant \frac{C'}{2^\ell a^2}.$$

**3.** En déduire que la suite $(M_\ell)_{\ell\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers 0.

**4.** Montrer que si une suite de réels positifs $(m_\ell)_{\ell\geqslant 0}$ converge vers 0, alors

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{2^0 m_0 + 2^1 m_1 + \ldots + 2^\ell m_\ell}{2^{\ell+1}} = 0.$$

**5.** Montrer qu'on a la convergence presque sûre

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements indépendants telle que pour tout $n \geqslant 1$, on ait $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = n\mathbf{1}_{A_n}$.

**6.** Calculer $\mathbb{E}[Y_n^2]$ pour tout entier $n \geqslant 1$. La suite $\left(\frac{Y_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini ? Y a-t-il une contradiction avec ce qui précède ?

**Solution de l'exercice 2**

1. En imitant un calcul du cours, on calcule l'espérance du carré de l'incrément de notre martingale entre les temps $n$ et $p$ :

$$\mathbb{E}[(X_p - X_n)^2] = \mathbb{E}[X_p^2 - 2X_pX_n + X_n^2].$$

Comme la martingale est de carré intégrable, les trois variables aléatoires qui apparaissent dans l'espérance du membre de droite sont intégrables, et on peut utiliser la linéarité de l'espérance (le risque que nous venons d'écarter étant d'écrire $\infty - \infty$) :

$$\mathbb{E}[(X_p - X_n)^2] = \mathbb{E}[X_p^2] - 2\mathbb{E}[X_pX_n] + \mathbb{E}[X_n^2].$$

On calcule le deuxième terme en conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_n$ et en utilisant la propriété de martingale :

$$\mathbb{E}[X_pX_n] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_pX_n|\mathscr{F}_n]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_p|\mathscr{F}_n]X_n\big] = \mathbb{E}[X_n^2].$$

On a donc

$$\mathbb{E}[(X_p - X_n)^2] = \mathbb{E}[X_p^2] - \mathbb{E}[X_n^2] \leqslant \mathbb{E}[X_p^2].$$

Cette question fait partie des mieux traitées. Notons que pour justifier que $-\mathbb{E}[X_n^2] \leqslant 0$, il n'est pas nécessaire d'invoquer une quelconque propriété de martingale ou de sous-martingale. Simplement, $X_n^2$ est une variable aléatoire positive, et a donc une espérance positive.

J'ai lu dans plusieurs copies des tentatives d'arguments par récurrence, dont à peu près aucune n'a abouti. Une première question était : récurrence sur $n$ ou sur $p$ ? De toute façon, je ne pense pas qu'une récurrence puisse vraiment aider à écrire l'argument, et je pense que la seule manière correcte d'écrire l'argument par récurrence consiste à démontrer directement l'assertion pour toutes les valeurs de $n$ et de $p$, comme ci-dessus, et à ne pas utiliser, en fait, l'hypothèse de récurrence.

2. Il y a plusieurs formes de l'inégalité maximale de Doob. L'une d'entre elles affirme que si $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ est une sous-martingale, alors pour tout entier $k \geqslant 0$ et tout réel $a \geqslant 0$, on a l'inégalité

$$a\mathbb{P}(\max(Y_0,\ldots,Y_k) \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}[Y_k \mathbf{1}_{\{\max(Y_0,\ldots,Y_k)\geqslant a\}}].$$

Pour une sous-martingale positive, notons que le membre de droite est inférieur à $\mathbb{E}[Y_k]$.

On peut appliquer cette inégalité à $Y_k = (X_{2^\ell+k} - X_{2^\ell})^2/2^{2\ell}$, qui est une sous-martingale positive par rapport à sa filtration naturelle, pour trouver

$$\mathbb{P}(M_\ell \geqslant a) = \mathbb{P}(M_\ell^2 \geqslant a^2) = \mathbb{P}\big(\max(Y_0,\ldots,Y_{2^{\ell+1}-2^\ell}) \geqslant a^2\big) \leqslant \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\big[Y_{2^{\ell+1}-2^\ell}\big].$$

On calcule l'espérance et on l'estime en utilisant la première question, puis l'hypothèse :

$$\mathbb{E}\big[Y_{2^{\ell+1}-2^\ell}\big] = \frac{1}{2^{2\ell}}\mathbb{E}[(X_{2^{\ell+1}} - X_{2^\ell})^2] \leqslant \frac{1}{2^{2\ell}}\mathbb{E}[X_{2^{\ell+1}}^2] \leqslant \frac{C2^{\ell+1}}{2^{2\ell}} = \frac{2C}{2^\ell},$$

ce qui donne le résultat avec $C' = 2C$.

On aurait aussi pu appliquer une autre forme de l'inégalité maximale qui assure, pour une martingale $(Z_k)_{k\geqslant 0}$, que pour tout entier $k \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{E}[\max(Z_0,\ldots,Z_k)^2] \leqslant 4\mathbb{E}[Z_k^2].$$

La constante 4 est ici le réel $(\frac{p}{p-1})^p$, avec $p = 2$.

En appliquant cette inégalité à la martingale $Z_k = (X_{2^\ell+k} - X_{2^\ell})/2^\ell$, et l'inégalité de Markov, on trouve

$$\mathbb{P}(M_\ell \geqslant a) = \mathbb{P}(M_\ell^2 \geqslant a^2) \leqslant \frac{1}{a^2}\mathbb{E}[\max(Z_0,\ldots,Z_{2^{\ell+1}-2^\ell})^2] \leqslant \frac{4}{a^2}\mathbb{E}[Z_{2^{\ell+1}-2^\ell}^2],$$

ce qui donne, en utilisant encore la première question et l'hypothèse,

$$\mathbb{P}(M_\ell \geqslant a) \leqslant \frac{4C2^{\ell+1}}{a^2 2^{2\ell}} = \frac{8C}{a^2 2^\ell},$$

c'est-à-dire le résultat avec $C' = 8C$.

Cette question a souvent été traitée, mais pas très bien. L'inégalité

$$\mathbb{E}[\max(W_1,\ldots,W_n)] \leqslant \max(\mathbb{E}[W_1],\ldots,\mathbb{E}[W_n])$$

est fausse en général. L'inégalité de Doob n'est pas non plus l'affirmation que

$$a\mathbb{P}(M_\ell \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}[M_\ell],$$

ceci n'étant "que" l'inégalité de Markov.

J'ai souvent lu des arguments incomplets qui aboutissaient à des constantes comme

$$C' = C2^\ell, \quad \text{ou} \quad C' = Cn.$$

Dans le premier cas, il s'agit d'une constante qui dépend de $\ell$, et qui n'est donc pas constante. Dans le deuxième cas, $C$ dépend d'un paramètre $n$ qui n'est même pas défini.

3. De la question 2, il découle que pour tout réel $a > 0$, on a

$$\sum_{\ell \geqslant 0} \mathbb{P}(|M_\ell| > a) < +\infty.$$

Il s'agit d'un critère de convergence presque sûre, parfois appelé convergence en probabilité rapide : si pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(|W_n - W| > \varepsilon) < +\infty,$$

alors la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers $W$. En effet, si cette assertion est vérifiée, le lemme de Borel–Cantelli assure que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant 0}\bigcap_{p\geqslant n}\{|W_p - W| \leqslant \varepsilon\}\Big) = 1.$$

On peut appliquer cette dernière égalité à tout $\varepsilon$ de la forme $\frac{1}{k}$, et trouver que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant 0}\bigcap_{p\geqslant n}\{|W_p - W| \leqslant \tfrac{1}{k}\}\Big) = 1.$$

L'événement dont la probabilité est 1 est exactement l'événement où la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $W$.

Ainsi, le résultat de la deuxième question entraîne que la suite $(M_\ell)_{\ell\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers 0.

Dans les copies dont les auteur·e·s ont voulu faire une démonstration complète (beaucoup ont simplement invoqué "le lemme de Borel–Cantelli", ou mieux, "une conséquence du lemme de Borel–Cantelli"), j'ai parfois vu une confusion assez pernicieuse contre laquelle je vous mets en garde.

Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires, et $a$ un réel, les événements

$$A = \liminf_{n\to\infty}\{X_n > a\} \quad \text{et} \quad B = \big\{\varliminf_{n\to\infty} X_n > a\big\}$$

ne sont pas égaux en général. L'expression "lim inf", ou "limite inférieure", n'a pas le même sens dans les deux cas. Dans le premier cas, il s'agit de la limite inférieure d'une suite d'ensembles, et dans le deuxième cas, de la limite inférieure d'une suite de réels.

Un élément $\omega \in \Omega$ appartient à $A$ si et seulement s'il existe un entier $p \geqslant 0$ (pouvant dépendre de $\omega$) tel que $X_n(\omega) > a$ pour tout $n \geqslant p$.

Un élément $\omega \in \Omega$ appartient à $B$ si et seulement si la limite inférieure de la suite $(X_n(\omega))_{n\geqslant 0}$ est strictement supérieure à $a$. Ceci équivaut à ce qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un entier $p \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant p$, on ait $X_n(\omega) > a + \varepsilon$.

Vous pouvez vérifier qu'il y a une inclusion entre $A$ et $B$, chercher des exemples où cette inclusion est stricte, et jouer à examiner la même question lorsqu'on remplace des limites inférieures par des limites supérieures, et/ou lorsque l'on remplace des inégalités strictes par des inégalités larges.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\ell_0$ un entier tel que pour tout $\ell \geqslant \ell_0$, on ait $|m_\ell| < \varepsilon$. Pour $\ell \geqslant \ell_0$, on a

$$\begin{aligned}
2^{-\ell-1}(2^0 m_0 + \ldots + 2^\ell m_\ell) &= 2^{-\ell-1}(2^0 m_0 + \ldots + 2^{\ell_0} m_{\ell_0}) \\
&\qquad + 2^{-\ell-1}(2^{\ell_0+1} m_{\ell_0+1} + \ldots + 2^\ell m_\ell) \\
&\leqslant 2^{-\ell-1}(2^0 + \ldots + 2^{\ell_0}) \max(m_0, \ldots, m_{\ell_0}) + 2^{-\ell-1}(2^{\ell_0+1} + \ldots + 2^\ell)\varepsilon \\
&\leqslant 2^{\ell_0-\ell} \max(m_0, \ldots, m_{\ell_0}) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sooit $\ell_1 \geqslant \ell_0$ un entier tel que $2^{\ell_0-\ell_1} \max(m_0, \ldots, m_{\ell_0}) < \varepsilon$. Alors pour $\ell \geqslant \ell_1$, le membre de droite est inférieur à $2\varepsilon$. Ainsi, la convergence cherchée a lieu.

Ce résultat n'est pas sans ressemblance avec le lemme de Cesaro, mais ce n'est est pas un cas particulier. Il fallait faire une démonstration.

5. Des deux questions précédentes, il découle que la suite

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit $\ell \geqslant 0$ l'unique entier tel que $2^\ell \leqslant n < 2^{\ell+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
|X_n| = |X_n - X_0| &\leqslant |X_n - X_{2^\ell}| + |X_{2^\ell} - X_{2^{\ell-1}}| + \ldots + |X_{2^1} - X_{2^0}| + |X_{2^0} - X_0| \\
&\leqslant 2^\ell M_\ell + \ldots + 2^0 M_0 + |X_1|.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{|X_n|}{n} \leqslant \frac{|X_1|}{n} + \frac{2^0 M_0 + \ldots + 2^\ell M_\ell}{n} &= \frac{|X_1|}{n} + \frac{2^{\ell+1}}{n} \frac{2^0 M_0 + \ldots + 2^\ell M_\ell}{2^{\ell+1}} \\
&\leqslant \frac{|X_1|}{n} + 2\, \frac{2^0 M_0 + \ldots + 2^\ell M_\ell}{2^{\ell+1}}.
\end{aligned}$$

Or $\frac{|X_1|}{n}$ converge presque sûrement vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini, et le résultat des deus questions précédentes entraîne que $\frac{2^0 M_0 + \ldots + 2^\ell M_\ell}{2^{\ell+1}}$ converge également presque sûrement vers 0.

Ainsi, $\frac{X_n}{n}$ converge presque sûrement vers 0.

6. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{E}[Y_n^2] = n^2 \mathbb{P}(A_n) = n.$$

Pourtant, on n'a pas la convergence presque sûre de $\frac{Y_n}{n}$ vers 0. En effet, puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, la deuxième assertion du lemme de Borel–Cantelli assure que

$$\mathbb{P}\Big( \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{p \geqslant n} A_p \Big) = 1.$$

Or sur cet événement, il existe une infinité de valeurs de $n$ pour lesquelles $\frac{Y_n}{n} = 1$, et la suite $(\frac{Y_n}{n})_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0.

Ceci n'est pas en contradiction avec ce qui précède : la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas une martingale (par rapport à sa filtration naturelle). Ceci montre que l'hypothèse que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ était une martingale est indispensable.

## Exercice 3

*Barème indicatif : 20 points (2+2+3+3+2+4+2+2).*

Soient $p$ et $q$ des réels strictement positifs tels que $p + q = 1$. Sur $\mathbb{Z}$, on considère le noyau de transition $P$ donné par

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ P(i, i+1) = p \text{ et } P(i, i-2) = q.$$

On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_i)_{i\in\mathbb{Z}}, X = (X_n)_{n\geqslant 0})$ sur $\mathbb{Z}$ de noyau de transition $P$.

**1.** Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible.

**2.** Montrer que si $p - 2q \neq 0$, alors la chaîne est transiente.

**3.** Montrer que si $n$ n'est pas un multiple de 3, alors la probabilité de retour $P^n(0,0)$ est nulle. Calculer $P^{3a}(0,0)$ pour tout entier $a \geqslant 0$.

**4.** Lorsque $p = \frac{2}{3}$, déterminer si la chaîne est récurrente ou transiente.

On suppose désormais $p < \frac{2}{3}$. On définit la variable aléatoire $M = \sup\{X_n : n \geqslant 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

**5.** Montrer que $\mathbb{P}_0(M = +\infty) = 0$.

**6.** Soient $k, l \geqslant 0$ des entiers. On pose $T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = k\}$. En utilisant au besoin la relation $\mathbb{P}_0(M \geqslant l) = \mathbb{P}_k(M \geqslant k + l)$ (qu'on justifiera succintement), montrer que

$$\mathbb{P}_0(M \geqslant k + l) = \mathbb{P}_0(M \geqslant k)\mathbb{P}_0(M \geqslant l).$$

**7.** On note $r = \mathbb{P}_0(M \geqslant 1)$. Pour tout $k \geqslant 0$, calculer $\mathbb{P}(M = k)$ en fonction de $r$.

**8.** En exprimant de deux manières $\mathbb{P}_0(M = 0)$, déterminer $r$ en fonction de $p$ et $q$.

### Solution de l'exercice 3

1. Soient $a < b$ deux entiers relatifs. Alors

$$\mathbb{P}_a(X_0 = a, X_1 = a+1, \ldots, X_{b-a} = b) = p^{b-a} > 0,$$

donc $a$ mène à $b$.

Si $b - a$ est pair, égal à $2m$ alors

$$\mathbb{P}_b(X_0 = b, X_1 = b-2, \ldots, X_m = a) = q^m > 0,$$

et $b$ mène à $a$. Si $b - a$ est impair, égal à $2m - 1$, alors

$$\mathbb{P}_b(X_0 = b, X_1 = b-2, \ldots, X_m = a-1, X_{m+1} = a) = q^m p > 0,$$

et $b$ mène aussi à $a$.

Ainsi, la chaîne est irréductible.

Une autre manière de rédiger cette question était la suivante.
Soit $i \in \mathbb{Z}$. On a $P(i, i+1) = p > 0$, donc $i$ mène à $i+1$. Par ailleurs,

$$P^2(i, i-1) \geqslant P(i, i-2)P(i-2, i-1) = qp > 0,$$

donc $i$ mène à $i-1$. Ainsi, chaque entier $i$ mène à ses deux voisins $i+1$ et $i-1$. Par récurrence, il mène à tous les entiers.

Par contre, j'ai lu assez souvent des explications qui n'en étaient pas, dont je vous propose le pastiche suivant.

*On remarque, en examinant le noyau de transition, que tout élément de l'espace d'états mène à tout autre. En effet, de tout $i \in \mathbb{Z}$, puisque $p > 0$ et $q > 0$, la chaîne peut visiter tout $j \in \mathbb{Z}$. Ainsi, de tout élément on peut aller à n'importe quel autre, et la chaîne est bien irréductible.*

Pour le correcteur, la seule information que contient ce paragraphe, c'est que la personne qui l'a écrit sait ce que signifie le mot "irréductible". Mais il ne contient aucun argument qui montre que la chaîne étudiée l'est.

2. Nous allons exprimer le fait que sous $\mathbb{P}_0$, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Pour cela, donnons-nous, sur un espace de probabilité $(\Xi, \mathscr{G}, \mathbb{Q})$, une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $\mathbb{Q}(\xi_1 = 1) = p$ et $\mathbb{Q}(\xi_1 = -2) = q$. Posons $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ a sous $\mathbb{Q}$ la même loi que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sous $\mathbb{P}_0$. Autrement dit, pour tout $n \geqslant 0$ et tous entiers $i_0, \ldots, i_n$, on a

$$\mathbb{Q}(S_0 = i_0, \ldots, S_n = i_n) = \mathbb{P}_0(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n),$$

ces deux quantités étant égales à $\delta_{i_0,0}P(i_0, i_1) \ldots P(i_{n-1}, i_n)$.

Supposons $p - 2q \neq 0$. Alors la loi forte des grands nombres nous assure que $\mathbb{Q}$-presque sûrement, la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\mathbb{E}[\xi_1] = p - 2q \neq 0$. En particulier, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge $\mathbb{Q}$-presque sûrement vers plus ou moins l'infini, suivant le signe de $p - 2q$.

Ainsi, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge également $\mathbb{P}_0$-presque sûrement vers plus ou moins l'infini. En particulier, $\mathbb{P}_0$-presque sûrement, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne prend qu'un nombre fini de fois la valeur 0. Ceci entraîne que 0 est transient. La chaîne est donc transiente.

3. La chaîne se déplace par pas de 1 et de $-2$. Supposons $P^n(0, 0) > 0$. Ceci signifie qu'il est possible pour la chaîne de partir de 0 et d'y revenir après exactement $n$ pas. Parmi ces $n$ pas, un certain nombre, que nous notons $a$, sont des pas de $-2$, et les $n - a$ autres sont des pas de 1. Puisqu'on revient en 0 après ces $n$ pas, on a donc $a \times (-2) + (n - a) \times (1) = 0$, c'est-à-dire $n = 3a$. Ainsi, $n$ est un multiple de 3.

Supposons que $n = 3a$ et calculons $P^{3a}(0, 0)$. Il faut compter de combien de manières la marche peut faire $a$ pas de $-2$ et $n - a = 2a$ pas de 1. Il suffit pour cela de compter quels sont, parmi les $n$ pas faits par la marche, ceux qui sont des pas de $-2$. La probabilité d'une suite particulière de pas ne dépend que du nombre de pas de $-2$ et de pas de 1, et nous trouvons

$$P^{3a}(0,0) = \binom{3a}{a} p^{2a} q^a.$$

La deuxième question, qui a pourtant été traitée en détail en cours, a malheureusement été assez mal réussie (le calcul de $P^{3a}(0,0)$).

Quant à la première, elle a donné lieu à beaucoup de justifications longues, verbeuses, et peu convaincantes. Une des tentatives d'explication les moins fausses et imprécises (mais fausse tout de même) consistait à raisonner en quelque sorte par récurrence ; à observer qu'on ne peut pas aller de $0$ à $0$ en un ni en deux pas, mais que c'est possible en trois pas. Ensuite, on suggérait plus ou moins explicitement que pour aller de $0$ en $0$, il n'y avait pas d'autre solution que de revenir en $0$ tous les trois pas, ce qui n'est pas vrai.

J'ai lu une fois un argument qui m'a semblé être le meilleur possible, bien plus concis en tout cas que celui que j'ai écrit ci-dessus : cet argument consiste à observer que tous les pas que fait le chaîne sont congrus à $1$ modulo $3$, si bien que partant de $0$, au temps $n$, la marche se trouve (presque sûrement) en un entier congru à $n$ modulo $3$. Pour qu'elle ait une probabilité strictement positive de se trouver en $0$ au temps $n$, il faut donc que $0$ et $n$ soient congrus modulo $3$, c'est-à-dire que $n$ soit un multiple de $3$.

4. La formule de Stirling nous donne l'équivalent $k! \sim k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}$ et nous permet d'écrire

$$P^{3a}(0,0) \sim \frac{(3a)^{3a} e^{-3a}\sqrt{2\pi 3a}}{a^a e^{-a}\sqrt{2\pi a}(2a)^{2a} e^{-2a}\sqrt{2\pi 2a}} p^a q^{2a} \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{3^{3a}}{2^{2a}} p^{2a} q^a \frac{1}{\sqrt{a}}$$

et puisque $p = \frac{2}{3}$, ceci se simplifie en

$$P^{3a}(0,0) \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

La probabilité de retour $P^{3a}(0,0)$ est équivalente au terme général d'une série divergente. Ainsi, nous pouvons calculer la fonction de Green de 0 :

$$G(0,0) = \sum_{n \geqslant 0} P^n(0,0) = \sum_{a \geqslant 0} P^{3a}(0,0) = +\infty.$$

La chaîne est donc récurrente.

Cette question a été assez rarement bien traitée. Attention aux noms propres, il vaut beaucoup mieux écrire Stirling que Sterling, et Riemann que Reimann. (Et il n'y a d'ailleurs pas besoin de déranger Bernhard Riemann pour dire que la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge).

5. Nous avons démontré à la question 2 que sous l'hypothèse $p < \frac{2}{3}$, la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ converge $\mathbb{P}_0$-presque sûrement vers $-\infty$. En particulier, cette suite est majorée $\mathbb{P}_0$-presque sûrement, si bien que $\mathbb{P}_0(M = +\infty) = 0$.

6. Partant de 0, la chaîne visite un entier supérieur ou égal à $k+l$ si et seulement si elle visite $k$, et si après le premier moment où elle a visité $k$, elle visite un entier supérieur ou égal à $k+l$. Autrement dit, en notant $\widehat{M} = \sup\{\widehat{X}_n : n \geqslant 0\}$ la version canonique de la variable aléatoire $M$, qui est une variable aléatoire définie sur l'espace canonique $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, on a, $\mathbb{P}_0$-p.s.,

$$\mathbf{1}_{\{M \geqslant k+l\}} = \mathbf{1}_{\{\widehat{M} \geqslant k+l\}}(\theta_T(X))\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}.$$

La propriété de Markov forte s'écrit donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(M \geqslant k+l) &= \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_{\{\widehat{M} \geqslant k+l\}}(\theta_T(X))\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}] \\
&= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_0[\mathbf{1}_{\{\widehat{M} \geqslant k+l\}}(\theta_T(X))\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}|\mathscr{F}_T]] \\
&= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_{X_T}[\mathbf{1}_{\{\widehat{M} \geqslant k+l\}}(X)]\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}] \\
&= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_k[\mathbf{1}_{\{M \geqslant k+l\}}]\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}] \\
&= \mathbb{P}_0(T<\infty)\mathbb{P}_k(M \geqslant k+l) = \mathbb{P}_0(M \geqslant k)\mathbb{P}_k(M \geqslant k+l).
\end{aligned}$$

De l'invariance par translation du noyau de transition, c'est-à-dire du fait que la suite de variables aléatoires $(X_n+k)_{n\geqslant 0}$ a sous $\mathbb{P}_0$ la même loi que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sous $\mathbb{P}_k$, on déduit que

$$\mathbb{P}_k(M \geqslant k+l) = \mathbb{P}_0(M \geqslant l).$$

Finalement, on trouve

$$\mathbb{P}_0(M \geqslant k+l) = \mathbb{P}_0(M \geqslant k)\mathbb{P}_0(M \geqslant l).$$

7. Il découle de la question précédente que la loi de $M$ est géométrique. En effet, on a $\mathbb{P}_0(M \geqslant 1) = r$, donc pour tout $k \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}_0(M \geqslant k) = r^k$, si bien que pour tout $k \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}_0(M = k) = (1-r)r^k.$$

8. Calculons $\mathbb{P}_0(M=0)$. Partant de 0, pour que $M=0$, il faut que la chaîne ne rende visite à aucun entier strictement positif. Il faut donc que son premier pas soit un pas de $-2$, puis le maximum de la chaîne à partir du temps 1 soit inférieur ou égal à 0, c'est-à-dire égal à $-2$, $-1$, ou 0.

$$\mathbb{P}_0(M=0) = \mathbb{P}_0\big(X_1 = -2, \widehat{M}(\theta_1(X)) \in \{-2,-1,0\}\big).$$

Grâce à la propriété de Markov au temps 1, on a donc

$$\mathbb{P}_0(M=0) = q\,\mathbb{P}_{-2}(M \in \{-2,-1,0\}).$$

En utilisant à nouveau l'invariance par translation du noyau de transition, on a

$$\mathbb{P}_0(M=0) = q\,\mathbb{P}_0(M \in \{0,1,2\}) = q(\mathbb{P}_0(M=0) + \mathbb{P}_0(M=1) + \mathbb{P}_0(M=2)).$$

En remplaçant les probabilités par leurs valeurs en fonction de $r$, nous trouvons la relation

$$(1-r) = q(1-r)(1+r+r^2),$$

c'est-à-dire

$$r^2 + r - \tfrac{p}{q} = 0.$$

Cette équation admet une solution strictement inférieure à 1 si et seulement si $p < 2q$, c'est-à-dire lorsque $p < 2/3$, et cette solution est

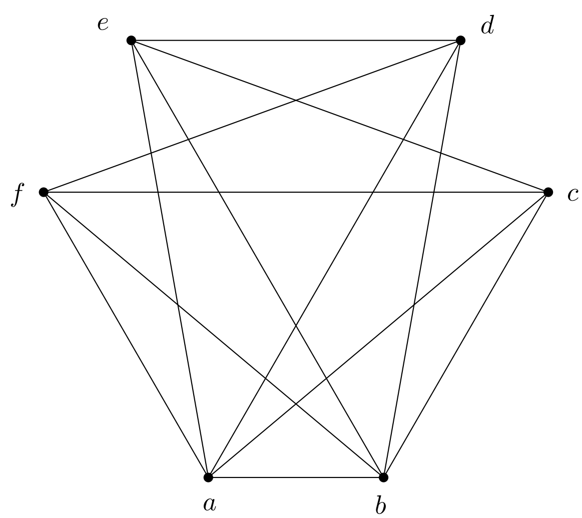
$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{p}{q}} - \frac{1}{2}.$$

Cette question était plus difficile, n'a été abordée que dans quelques copies, et n'a été complètement traitée par personne.

## Exercice 4

*Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).*

On considère la marche aléatoire sur le graphe représenté ci-dessous.




**1.** Déterminer toutes les probabilités invariantes pour cette marche aléatoire.

**2.** Partant du sommet $a$, combien de temps met la marche, en moyenne, à revenir au sommet $a$ ?

**3.** Entre deux visites en $c$, combien de fois la marche visite-t-elle, en moyenne, le sommet $e$ ?

**4.** Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_i \in \{a,b\}\}}$$

admet-elle sous $\mathbb{P}_c$ une limite presque sûre lorsque $n$ tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

**5.** Soit $h : \{a,b,c,d,e,f\} \to \mathbb{R}$ une fonction. La quantité

$$\mathbb{E}_a[h(X_n)]$$

admet-elle une limite lorsque $n$ tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

— Fin du sujet —

**Solution de l'exercice 4**

1. Le graphe est connexe, donc la marche aléatoire sur ce graphe est une chaîne de Markov irréductible. Tous les états sont donc de même nature (récurrents ou transients), et comme l'espace d'états est fini, ils sont tous récurrents. La chaîne admet donc une mesure invariante unique à multiplication près par une constante strictement positive, donc une unique mesure de probabilité invariante.

Pour déterminer cette probabilité invariante, on utilise le fait que la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible, donc invariante, pour la marche aléatoire sur le graphe. Cette mesure est donnée par

$$\mu = (\mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_d, \mu_e, \mu_f) = (5, 5, 4, 4, 4, 4).$$

La masse totale de $\mu$ est 26, si bien qu'elle se normalise en l'unique probabilité invariante

$$\pi = (\tfrac{5}{26}, \tfrac{5}{26}, \tfrac{2}{13}, \tfrac{2}{13}, \tfrac{2}{13}, \tfrac{2}{13}).$$

Comme chaque année, j'ai lu dans quelques copies des erreurs dans le comptage des arêtes. J'ai lu plusieurs fois que tous les sommets du graphe avaient le même degré. C'est dommage pour cet exercice qui était attendu, et plutôt facile.

2. Le temps moyen de retour en $a$ est donné par l'inverse de la masse attribuée à $a$ par la probabilité invariante :

$$\mathbb{E}_a[T_a] = \frac{1}{\pi(a)} = \frac{26}{5}.$$

3. L'unique mesure invariante $\nu$ qui associe à $c$ la masse 1 associe à chaque autre sommet une masse égale au nombre moyen de visites en ce sommet entre deux visites en $c$. On a $\nu = \pi/\pi(c)$, donc le nombre moyen de visites en $e$ entre deux visites en $c$ vaut

$$\nu(e) = \frac{\pi(e)}{\pi(c)} = 1.$$

4. Puisque la chaîne est irréductible et récurrente, le théorème ergodique assure que la quantité considérée converge $\mathbb{P}_c$-presque sûrement vers

$$\pi(\{a, b\}) = \frac{5}{13}.$$

5. Il est possible pour la marche aléatoire de revenir en $a$ en un temps 2 (en faisant par exemple $a, c, a$) et en un temps 3 (en faisant par exemple $a, c, e, a$). Puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, la chaîne est apériodique, et le théorème de convergence vers l'équilibre assure que l'espérance considérée converge, lorsque $n$ tend vers l'infini, vers

$$\int h \, \mathrm{d}\pi = \frac{1}{26}\big(5h(a) + 5h(b) + 4h(c) + 4h(d) + 4h(e) + 4h(f)\big).$$