Sorbonne Université | 2022 – 2023
Probabilités approfondies – MU4MA011 | 5 janvier 2023

Examen

Le sujet fait trois pages.
L'examen dure trois heures.
Les quatre exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 12 points (2+2+2+2+4).

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y = \min(X, \frac{1}{2})$.
1. Calculer $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{2})$. La loi de Y admet-elle une densité ?
2. Déterminer la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.
4. Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$.
5. Calculer soigneusement $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 20 points (2+4+4+3+4+3).

Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$, on se donne une martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$. On suppose que $X_0 = 0$ et que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$.

1. Montrer que pour tous entiers $0 \leqslant n \leqslant p$, on a $\mathbb{E}\big[(X_p - X_n)^2\big] \leqslant \mathbb{E}\big[X_p^2\big]$.

On fait l'hypothèse qu'il existe une constante réelle $C \geqslant 0$ telle que

$$\forall n \geqslant 0, \quad \mathbb{E}\big[X_n^2\big] \leqslant Cn.$$

Pour tout entier $\ell \geqslant 0$, on pose

$$M_\ell = \max_{2^\ell \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1}} \frac{|X_n - X_{2^\ell}|}{2^\ell}.$$

2. En appliquant une inégalité maximale de Doob, montrer qu'il existe une constante C' telle que pour tout entier $\ell \geqslant 0$ et tout réel $a > 0$, on ait

$$\mathbb{P}(M_\ell \geqslant a) \leqslant \frac{C'}{2^\ell a^2}.$$

3. En déduire que la suite $(M_\ell)_{\ell\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers 0.

4. Montrer que si une suite de réels positifs $(m_\ell)_{\ell\geqslant 0}$ converge vers 0, alors

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{2^0 m_0 + 2^1 m_1 + \ldots + 2^\ell m_\ell}{2^{\ell+1}} = 0.$$

5. Montrer qu'on a la convergence presque sûre

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements indépendants telle que pour tout $n \geqslant 1$, on ait $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = n\mathbf{1}_{A_n}$.

6. Calculer $\mathbb{E}[Y_n^2]$ pour tout entier $n \geqslant 1$. La suite $\left(\frac{Y_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers l'infini ? Y a-t-il une contradiction avec ce qui précède ?

Exercice 3

Barème indicatif : 20 points (2+2+3+3+2+4+2+2).

Soient p et q des réels strictement positifs tels que $p + q = 1$. Sur $\mathbb{Z}$, on considère le noyau de transition P donné par

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ P(i, i+1) = p \ \text{ et } P(i, i-2) = q.$$

On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_i)_{i\in\mathbb{Z}}, X = (X_n)_{n\geqslant 0})$ sur $\mathbb{Z}$ de noyau de transition P.

1. Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible.
2. Montrer que si $p - 2q \neq 0$, alors la chaîne est transiente.
3. Montrer que si n n'est pas un multiple de 3, alors la probabilité de retour $P^n(0,0)$ est nulle. Calculer $P^{3a}(0,0)$ pour tout entier $a \geqslant 0$.
4. Lorsque $p = \frac{2}{3}$, déterminer si la chaîne est récurrente ou transiente.

On suppose désormais $p < \frac{2}{3}$. On définit la variable aléatoire $M = \sup\{X_n : n \geqslant 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

5. Montrer que $\mathbb{P}_0(M = +\infty) = 0$.
6. Soient $k, l \geqslant 0$ des entiers. On pose $T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = k\}$. En utilisant au besoin la relation $\mathbb{P}_0(M \geqslant l) = \mathbb{P}_k(M \geqslant k + l)$ (qu'on justifiera succintement), montrer que

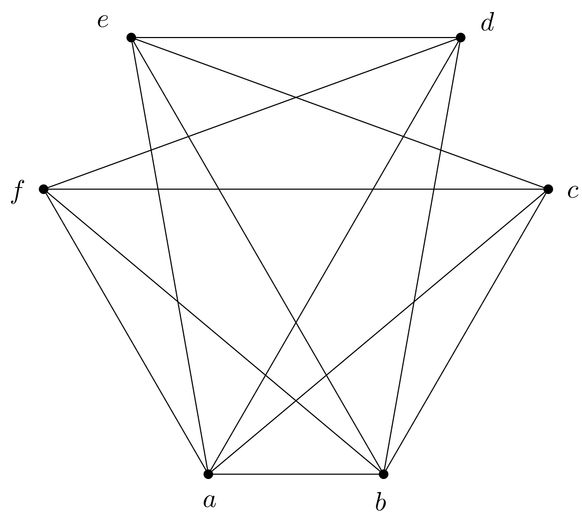
$$\mathbb{P}_0(M \geqslant k + l) = \mathbb{P}_0(M \geqslant k)\mathbb{P}_0(M \geqslant l).$$

7. On note $r = \mathbb{P}_0(M \geqslant 1)$. Pour tout $k \geqslant 0$, calculer $\mathbb{P}(M = k)$ en fonction de r.
8. En exprimant de deux manières $\mathbb{P}_0(M = 0)$, déterminer r en fonction de p et q.

Exercice 4

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On considère la marche aléatoire sur le graphe représenté ci-dessous.



1. Déterminer toutes les probabilités invariantes pour cette marche aléatoire.

2. Partant du sommet a, combien de temps met la marche, en moyenne, à revenir au sommet a ?

3. Entre deux visites en c, combien de fois la marche visite-t-elle, en moyenne, le sommet e ?

4. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire. La quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_i\in\{a,b\}\}}$$

admet-elle sous $\mathbb{P}_c$ une limite presque sûre lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

5. Soit $h : \{a,b,c,d,e,f\} \to \mathbb{R}$ une fonction. La quantité

$$\mathbb{E}_a[h(X_n)]$$

admet-elle une limite lorsque n tend vers l'infini, et si oui, laquelle ?

Fin du sujet