Sorbonne Université
M1 de mathématiques

Probabilités approfondies (MU4MA011)
2020-2021

Interrogation du 12 octobre 2020 : corrigé

Exercice

1. On a
$$\mathbf{P}(N=k)=\mathbf{P}(N=k,X\leq 1)=\binom{n}{k}\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}dt.$$
Pour $k=0$, cette quantité vaut
$$\mathbf{P}(N=0)=\binom{n}{0}\int_0^1 (1-t)^n dt=1\times\frac{1}{n+1}.$$
De plus, si $0\leq k<n$, on a, en intégrant par parties,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N=k+1)&=\binom{n}{k+1}\int_0^1 t^{k+1}(1-t)^{n-k-1}dt\\&=\binom{n}{k+1}\left(\left[-\frac{t^{k+1}(1-t)^{n-k}}{n-k}\right]_0^1+\frac{k+1}{n-k}\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}dt\right)\\&=0+\binom{k}{n}\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}dt\\&=\mathbf{P}(N=k).\end{aligned}$$
Par conséquent, $\mathbf{P}(N=k)=\frac{1}{n+1}$ pour tout $0\leq k\leq n$. Donc N suit la loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$.
Par ailleurs,
$$\mathbf{P}(X\leq x)=\sum_{k=0}^n\mathbf{P}(X\leq x,N=k)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\int_0^x t^k(1-t)^{n-k}dt=\int_0^x(x+(1-t))^n dt=\int_0^x dt=x,$$
donc X suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Calculons tout d'abord $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\{N=k\}})$ pour $0\leq k\leq n$.
$$\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{N=k})=\binom{n}{k}\int_0^1 t\times t^k(1-t)^{n-k}dt=\binom{n}{k}\left((n+2)\binom{n+1}{k+1}\right)^{-1}=\frac{k+1}{(n+1)(n+2)}.$$
On a donc $\mathbf{E}(X|N=n)=\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{N=k})/\mathbf{P}(N=k)=(n+1)\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{N=k})=\frac{k+1}{n+2}$. On en déduit $\mathbf{E}(X|N)=\frac{N+1}{n+2}$.

3. L'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(N|X)$ est donnée par
$$\mathbf{E}(N|X)=\frac{\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}}{\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}}=\frac{nX}{1}=nX.$$