

Interrogation du 12 octobre 2020

Durée : 1 heure

Questions de cours

1. Donner la définition (avec toutes ses hypothèses) de l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant une tribu \mathcal{G} .
2. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle intégrable et N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N} , alors

$$\mathbf{E}(X|N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(X|N = n) \mathbf{1}_{N=n}.$$

Exercice

Soit (N, X) un couple aléatoire à valeurs dans $\{0, \dots, n\} \times [0, 1]$. On suppose que pour $0 \leq k \leq n$, et $0 \leq x \leq 1$,

$$\mathbf{P}(N = k, X \leq x) = \binom{n}{k} \int_0^x t^k (1-t)^{n-k} dt.$$

1. Montrer que les variables aléatoires N et X sont de lois uniformes respectivement sur $\{0, \dots, n\}$ et $[0, 1]$.
2. Calculer $\mathbf{E}(X|N)$.
3. Calculer $\mathbf{E}(N|X)$.