

Interrogation du 8 octobre 2020

Durée : 1 heure

Questions de cours

1. Donner la définition (avec toutes ses hypothèses) de l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant une tribu \mathcal{G} .
2. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle intégrable et \mathcal{G} est une tribu, alors $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbf{E}(X)$.

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, que l'on suppose intégrables. Calculer $\mathbf{E}(X|X+Y)$, après avoir justifié son existence.

Exercice 2

Soit (X, Λ) un couple aléatoire à valeurs dans \mathbf{R}^2 et admettant la densité

$$f(x, \lambda) = \mathbf{1}_{x>0} \mathbf{1}_{\lambda>0} \lambda e^{-(x+1)\lambda}.$$

1. Donner la loi de chacune des variables aléatoires X et Λ .
2. Montrer l'existence et donner la valeur de $\mathbf{E}(X|\Lambda)$.
3. Mêmes questions pour $\mathbf{E}(\Lambda|X)$.