Sorbonne Université **2021 – 2022**
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires **9 mars 2022**

Convergence de mesures – Grandes déviations – Percolation

Examen - Session 2

On traitera deux des trois questions de cours ci-dessous, au choix.
Cette première partie de l'épreuve dure quarante minutes.
Elle comptera pour un quart de la note.
Aucun document n'est autorisé.

Question de cours 1

Rappeler la signification des mots soulignés dans l'énoncé ci-dessous, puis le démontrer.

Soit (E, d) un espace métrique. Sur l'espace $\mathcal{C}([0, 1], E)$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans E, montrer que la <u>tribu borélienne</u> et la <u>tribu cylindrique</u> sont égales.

Question de cours 2

Rappeler la signification des mots soulignés dans l'énoncé ci-dessous, puis le démontrer.

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. Soit $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de mesures boréliennes de probabilité sur E qui satisfait un principe de grandes déviations de <u>bonne fonction de taux</u> I. Soit $f : E \to F$ une <u>application continue</u>. Montrer que la suite de mesures $(\mu_n \circ f^{-1})_{n\geqslant 1}$ satisfait sur F un principe de grandes déviations dont on précisera la fonction de taux.

Question de cours 3

Rappeler la signification des mots soulignés dans l'énoncé ci-dessous, puis le démontrer.

On considère la percolation de paramètre $p \in [0, 1]$ sur un graphe (V, E). Soient f et g deux fonctions <u>mesurables</u> bornées et <u>croissantes</u> sur $\{0, 1\}^E$. Montrer que

$$\mathbb{E}_p[fg] \geqslant \mathbb{E}_p[f]\mathbb{E}_p[g].$$