Sorbonne Université **2021 – 2022**
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires **27 janvier 2022**

Convergence de mesures – Grandes déviations – Percolation

Examen - Partie 1

On traitera deux des trois questions de cours ci-dessous, au choix.
Cette première partie de l'épreuve dure quarante minutes.
Elle comptera pour un quart de la note.
Aucun document n'est autorisé.

Question de cours 1

Rappeler la signification des mots soulignés dans l'énoncé ci-dessous, puis le démontrer.

Soit (E, d) un espace métrique <u>polonais</u>. Pour toute mesure de probabilité μ <u>borélienne</u> sur E, la partie $\{\mu\}$ de $\mathcal{M}(E)$ est <u>tendue</u>.

Question de cours 2

Rappeler la signification des mots soulignés dans l'énoncé ci-dessous, puis le démontrer.

Soit (E, d) un espace métrique. Pour toute partie A de E, on note $\overline{A}$ l'<u>adhérence</u> de A, et $\mathring{A}$ l'<u>intérieur</u> de A. On se donne sur E une suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ de mesures boréliennes de probabilité, et une <u>fonction de taux</u> I. On suppose que la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie les deux assertions suivantes.

1. Pour tout réel α et tout borélien A de E tel que $\overline{A} \subseteq \{I > \alpha\}$, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log \mu_n(A) \leqslant -\alpha.$$

2. Pour tout $x \in E$ tel que $I(x) < \infty$ et tout borélien A de E tel que $x \in \mathring{A}$, on a

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log \mu_n(A) \geqslant -I(x).$$

Alors la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait sur E un principe de grandes déviations de fonction de taux I.

Question de cours 3

Rappeler la signification des mots soulignés dans l'énoncé ci-dessous, puis le démontrer.

On se donne un entier $d \geqslant 1$ et on note p_c la <u>valeur critique du paramètre</u> pour la <u>percolation par arêtes</u> sur le réseau $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. On a l'inégalité

$$p_c \geqslant \frac{1}{2d - 1}.$$

Examen - Partie 2

Les trois exercices sont indépendants.
Chaque exercice comptera pour un quart de la note.
Cette deuxième partie de l'épreuve dure deux heures vingt.
La consultation des notes de cours et du polycopié est autorisée.

Exercice 1

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on va construire une mesure borélienne de probabilité μ_n sur l'espace $C([0,1],\mathbb{R}^3)$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Pour cela, on se donne, une fois pour toutes, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, une suite $(V_k)_{k\geqslant 0}$ de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^3$ indépendants et identiquement distribués, de loi $\mathcal{N}(0, I_3)$. On pose $Z_0 = (0,0,0)$ et, pour tout $k \geqslant 0$,

$$Z_{k+1} = Z_k + V_{k+1}.$$

Pour tout réel $t \geqslant 0$, on note $[t]$ la partie entière de t, et $\{t\} = t - [t]$ sa partie fractionnaire. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose

$$X_n(t) = (1 - \{nt\})\,\frac{Z_{[nt]}}{\sqrt{n}} + \{nt\}\,\frac{Z_{[nt]+1}}{\sqrt{n}}$$

et on définit ainsi sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ une variable aléatoire X_n à valeurs dans l'espace $C([0,1],\mathbb{R}^3)$. On définit enfin μ_n comme la loi de X_n.

Question. Montrer soigneusement, en appliquant le critère de Kolmogorov, que la suite de mesures $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ est tendue sur $C([0,1],\mathbb{R}^3)$.

Exercice 2

Soit $N \geqslant 1$ un entier. On se donne une matrice stochastique $P = (p_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$ qu'on considère comme la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur l'ensemble $E = \{1, \ldots, N\}$. On suppose que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

On fixe une fois pour toutes un élément $i_0 \in E$ et on se donne, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans E et qui est une chaîne de Markov de matrice de transition P issue de i_0, ce qui signifie que $X_0 = i_0$ presque sûrement et que pour tous $n \geqslant 1$ et $i_1, \ldots, i_n \in E$, on a

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$ et toute suite $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ d'éléments de E, on définit

$$\ell_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{(x_k, x_{k+1})},$$

qui est une mesure de probabilité sur $E \times E = E^2$. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit

$$L_n = \ell_n(X_0, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{(X_k, X_{k+1})},$$

qui est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{M}(E^2)$ des mesures de probabilité sur E^2.

Question. Montrer (en suivant éventuellement les indications ci-dessous) que la suite des lois des variables aléatoires $(L_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait sur $\mathcal{M}(E^2)$ un principe de grandes déviations dont on déterminera la fonction de taux.

Indications. L'entier n étant fixé, on pourra introduire l'ensemble

$$\mathcal{L}_n = \{\ell_n(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E^{n+1}\} \subset \mathcal{M}(E^2),$$

et pour tout $\nu \in \mathcal{L}_n$, l'ensemble

$$T_n(\nu) = \{\mathbf{x} \in E^{n+1} : \ell_n(\mathbf{x}) = \nu\}.$$

Étant donné $\nu \in \mathcal{L}_n$, on pourra poser, pour tous $i, j \in E$, $n_{ij} = n\nu(\{(i,j)\})$, et pour tout $i \in E$, $n_i = n\nu(\{i\} \times E) = \sum_{j\in E} n_{ij}$; et on pourra respectivement admettre et démontrer les inégalités

$$n^{-N} \prod_{i\in E} \frac{n_i!}{\prod_{j\in E} n_{ij}!} \overset{\text{admis}}{\leqslant} |T_n(\nu)| \leqslant \prod_{i\in E} \frac{n_i!}{\prod_{j\in E} n_{ij}!}.$$

On se permettra de traiter l'approximation $\log k! \simeq k \log k$ comme une égalité.

Exercice 3

On fixe un entier $d \geqslant 2$ et on considère la percolation sur le réseau $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. On note p_c la valeur critique du paramètre de percolation. Pour toute partie finie $A \subset \mathbb{Z}^d$, on pose

$$\delta A = \{\{x, y\} \in \mathbb{E}^d : x \in A, y \notin A\}$$

puis, pour tout $p \in [0, 1]$,

$$\varphi_p(A) = \sum_{e \in \delta A} \mathbb{P}_p(0 \xleftrightarrow{A} e \text{ et } \omega_e = 1),$$

et enfin

$$\mathcal{D}_A = \{p \in [0, 1] : 0 < \varphi_p(A) < 1\}.$$

1. Soit $A \subset \mathbb{Z}^d$ un ensemble fini. Montrer que la fonction $p \mapsto \varphi_p(A)$ est soit identiquement nulle soit continue et strictement croissante sur $[0, 1]$. Calculer $\varphi_1(A)$ et montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_A$ est soit vide, soit un intervalle de la forme $]0, q_A[$ avec $q_A \in]0, 1[$.

2. Décrire aussi précisément que possible l'ensemble $\bigcup_A \mathcal{D}_A$, où l'union est prise sur les parties finies de $\mathbb{Z}^d$.

3. Montrer que pour toute partie finie $A \subset \mathbb{Z}^d$ contenant l'origine, on a $\varphi_{p_c}(A) \geqslant 1$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on note $B_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_\infty \leqslant n\}$ et $\partial B_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_\infty = n\}$.

4. Montrer que si $e = \{x, y\}$ et $e' = \{x', y'\}$ sont deux éléments distincts de δB_n, avec $x, x' \in B_n$ (possiblement égaux), alors y et y' sont deux éléments distincts de ∂B_{n+1}.

5. Montrer que dans toute configuration de percolation ω, l'agrégat de l'origine vérifie

$$C(0) \supseteq \bigcup_{n \geqslant 0} \big\{y \in \partial B_{n+1} : \exists x \in B_n, e = \{x, y\} \in \delta B_n, 0 \xleftrightarrow{B_n} e \text{ et } \omega_e = 1\big\}.$$

6. En déduire que

$$\mathbb{E}_{p_c}\big[|C(0)|\big] \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{p_c}(B_n).$$

7. Tirer une conclusion de ce qui précède et, dans la mesure du possible, la commenter.

— Fin du sujet —