Sorbonne Université | 2021 – 2022
Probabilités approfondies – MU4MA011 | 29 octobre 2021

Partiel

L'épreuve dure deux heures.
Les trois exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 30 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 9 points (2+2+3+2).

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ceci signifie que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(X = n) = 2^{-n}$.

Soit Y une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X + Y|Y]$.
2. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[(X + Y)^2|Y]$.
3. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[Y|X + Y]$.
4. L'espérance de $2^X Y$ a-t-elle un sens ? Si oui, combien vaut-elle ?

Exercice 2

Barème indicatif : 12 points (2+2+3+3+2).

Soit $(V_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $\mathbb{E}[V_1] = 1$ et que V_1 n'est pas presque sûrement constante.

On pose $Y_0 = 1$, on note $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale, et pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^n V_k$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(V_k, k \leqslant n)$.

1. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et que $\left(\sqrt{Y_n}\right)_{n\geqslant 0}$ est une sur-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $\mathbb{E}\left[\sqrt{V_1}\,\right] < 1$. (*Attention : on demande une inégalité stricte.*)
3. Montrer que $\left(\sqrt{Y_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers 0.
4. La martingale $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle fermée ?
5. Montrer que $\left(\sqrt{Y_n}\right)_{n\geqslant 0}$ est une sur-martingale bornée dans L^2 et qui ne converge pas dans L^2.

Exercice 3

Barème indicatif : 14 points (2+2+2+3+2+3).

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées et de variance 1. On pose $W_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration engendrée par $(W_n)_{n\geqslant 0}$.

1. Quelle est la loi de W_n ? Montrer que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

On fixe un entier $N \geqslant 0$.

2. Calculer la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(W_0, W_1, \dots, W_N)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $W_n - \frac{n}{N} W_N$ est indépendante de W_N.
4. Montrer que pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, on a
$$\mathbb{E}[\varphi(W_n) | W_N] = \Phi_n(W_N),$$
où la fonction $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par
$$\Phi_n(t) = \mathbb{E}\left[\varphi\Big(W_n - \frac{n}{N} W_N + \frac{n}{N} t\Big)\right].$$
5. On pose $B_n = W_n - \frac{n}{N} W_N$. Donner la matrice de covariance de $(B_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$.
6. Montrer que les vecteurs aléatoires $(B_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ et $(B_{N-n})_{0\leqslant n\leqslant N}$ ont même loi.

—— Fin du sujet ——

Solution de l'exercice 1

1. Comme X et Y sont intégrables, $\mathbb{E}[X+Y|Y]$ a un sens et $\mathbb{E}[X+Y|Y] = \mathbb{E}[X|Y] + \mathbb{E}[Y|Y]$. Comme Y est $\sigma(Y)$-mesurable, $\mathbb{E}[Y|Y] = Y$. Comme X est indépendante de Y, on a $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$. Puisque X est une variable aléatoire géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, avec les conventions de l'énoncé, on a $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{1/2} = 2$. Donc $\mathbb{E}[X|Y] = Y + 2$ presque sûrement.

2. Les variables aléatoires X et Y étant dans L^2, chacun des termes de la somme $X^2 + 2XY + Y^2$ est intégrable. Ainsi, $\mathbb{E}[(X+Y)^2|Y]$ a un sens et est égal à $\mathbb{E}[X^2|Y] + 2\mathbb{E}[XY|Y] + \mathbb{E}[Y^2|Y]$. Comme X est indépendante de Y et Y est $\sigma(Y)$-mesurable, on a $\mathbb{E}[(X+Y)^2|Y] = \mathbb{E}[X^2] + 2Y\mathbb{E}[X] + Y^2$. Comme X est une variable aléatoire géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, on sait que $\mathbb{E}[X] = 2$ et $\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1-\frac{1}{2}}{(1/2)^2} + 2^2 = 2 + 4 = 6$. Donc $\mathbb{E}[(X+Y)^2|Y] = Y^2 + 4Y + 6$ presque sûrement.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $\mathbb{E}[Y|X+Y=n]$, c'est-à-dire $\frac{\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{X+Y=n}]}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$. On a

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \mathbb{P}((Y=-1 \text{ et } X=n+1) \text{ ou } (Y=1 \text{ et } X=n-1)).$$

Cela vaut $\mathbb{P}(Y=-1 \text{ et } X=n+1) + \mathbb{P}(Y=1 \text{ et } X=n-1)$ car les événements sont disjoints. Par indépendance de X et Y puis en utilisant la loi de Y, on a

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \mathbb{P}(Y=-1)\mathbb{P}(X=n+1) + \mathbb{P}(Y=1)\mathbb{P}(X=n-1) = \frac{\mathbb{P}(X=n-1)+\mathbb{P}(X=n+1)}{2}.$$

Cette quantité vaut donc $\frac{1}{4}$ si $n=0$; $\frac{1}{8}$ si $n=1$; et $\frac{2^{-(n-1)}+2^{-(n+1)}}{2} = \frac{5}{4}\times 2^{-n}$ si $n \geqslant 2$. L'espérance $\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{X+Y=n}]$ vaut $\mathbb{E}[1\times\mathbf{1}_{X=n-1,Y=1} + (-1)\times\mathbf{1}_{X=n+1,Y=-1}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X=n-1,Y=1}] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X=n+1,Y=-1}] = \mathbb{P}(X=n-1, Y=1) - \mathbb{P}(X=n+1, Y=-1) = \mathbb{P}(X=n-1)\mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(X=n+1)\mathbb{P}(Y=-1)$, où la dernière égalité utilise l'indépendance de X et Y. La loi de Y nous donne donc $\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{X+Y=n}] = \frac{\mathbb{P}(X=n-1)-\mathbb{P}(X=n+1)}{2}$. Cette seconde quantité vaut donc $-\frac{1}{4}$ si $n=0$; $-\frac{1}{8}$ si $n=1$; et $\frac{2^{-(n-1)}-2^{-(n+1)}}{2} = \frac{3}{4}\times 2^{-n}$ si $n \geqslant 2$. On a donc

$$\mathbb{E}[Y|X+Y] = \begin{cases} \frac{-1/4}{1/4} = -1 & \text{si } X+Y=0, \\ \frac{-1/8}{1/8} = -1 & \text{si } X+Y=1, \\ \frac{(3/4)\times 2^{-(X+Y)}}{(5/4)\times 2^{-(X+Y)}} = \frac{3}{5} & \text{si } X+Y \geq 2. \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathbb{E}[Y|X+Y] = -\mathbf{1}_{X+Y\leq 1} + \frac{3}{5}\mathbf{1}_{X+Y\geq 2}$ presque sûrement.

Remarque. Comme $X \geq 1$ et $Y \in \{-1,1\}$, dès que la condition $X+Y \leq 1$ est vérifiée, on a forcément $Y=-1$. Cela fournit une preuve alternative du fait que la variable aléatoire $\mathbb{E}(Y|X+Y)$ vaut constamment -1 sur l'événement $X+Y\leq 1$.

4. L'espérance de $(2^XY)^+ = \max(2^XY, 0) = 2^X\mathbf{1}_{Y=1}$ vaut $\mathbb{E}[2^X]\mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y=1}]$. En effet, 2^X et $\mathbf{1}_{Y=1}$ sont positives et indépendantes l'une de l'autre. L'espérance $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y=1}]$ vaut $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}$. Par théorème de transfert, $\mathbb{E}[2^X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\mathbb{P}(X=n)$. Comme X est une variable aléatoire géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, on a $\mathbb{E}[2^X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$.

Donc $\mathbb{E}[(2^X Y)^+] = \frac{1}{2} \times \infty = \infty$. De même, $\mathbb{E}[(2^X Y)^-] = \infty$. Donc l'espérance de $2^X Y$ n'est pas bien définie.

Solution de l'exercice 2

1. Pour tout $n \geqslant 0$, $Y_n \geqslant 0$ et est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Pour montrer que c'est une martingale il suffit de vérifier que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n$. Or $Y_{n+1} = Y_n V_{n+1}$ avec V_{n+1} indépendant de $\mathcal{F}_n$ donc

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n \mathbb{E}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n \mathbb{E}[V_{n+1}] = Y_n.$$

de plus comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave, on a que $(\sqrt{Y_n})_n$ est une sur-martingale (par Jensen).

2. Par Cauchy–Schwarz, $\mathbb{E}[\sqrt{Y_1}] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[Y_1]} = 1$ de plus il y a égalité si et seulement si $\sqrt{Y_1}$ est presque sûrement égale à une constante ce qui est exclu.

3. Comme $(\sqrt{Y_n})_n$ est une sur-martingale positive, elle converge p.s d'après le résultat du cours. Or $\mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\sqrt{Y_k}] = \mathbb{E}[\sqrt{Y_1}]^n$ converge vers 0. Donc $\sqrt{Y_n}$ converge dans L^1 vers 0 et par unicité de la limite, elle converge également vers 0 p.s.

4. Puisque $(\sqrt{Y_n})_n$ converge p.s vers 0 on en déduit que $(Y_n)_n$ également. Elle ne peut pas être fermée car sinon $Y_n = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ ce qui n'est pas le cas.

5. On sait déjà que $(\sqrt{Y_n})_{n\geqslant 1}$ est une sur-martingale, de plus elle est bornée dans L^2 car $\mathbb{E}[(\sqrt{Y_n})^2] = \mathbb{E}[Y_n] = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. Elle converge p.s vers 0 mais ne converge pas dans L^2 vers 0 car $\mathbb{E}[(\sqrt{Y_n})^2] = 1$, $\forall n \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 3

1. La variable W_n est une somme de variables gaussiennes indépendantes, elle est donc elle-même gaussienne, de moyenne 0 et de variance $\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k) = n$.

La variable W_n est donc intégrable, et elle est $\mathcal{F}_n$-mesurable par définition de $\mathcal{F}_n$. Pour montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, il ne reste plus qu'à remarquer :

$$\mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[W_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = W_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = X_n.$$

2. Comme les W_n sont centrées, la covariance de W_n et W_m est donnée par $\mathbb{E}[W_n W_m]$. On a donc, pour $n \leqslant m$

$$\mathrm{Cov}(W_n, W_m) = \mathbb{E}[W_n W_m] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[W_n W_m|\mathcal{F}_n]\right] = \mathbb{E}\left[W_n \mathbb{E}[W_m|\mathcal{F}_n]\right] = \mathbb{E}[W_n^2] = n,$$

l'avant-dernière égalité venant du fait que $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale. En somme, pour tous n et m, on a $\mathrm{Cov}(W_n, W_m) = \min(n, m)$. La matrice de covariance cherchée est donc

$$\Gamma^W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & N \end{pmatrix}.$$

3. Par bilinéarité, la covariance de $W_n - \frac{n}{N}W_N$ et W_N est donnée par :

$$\mathrm{Cov}\left(W_n - \frac{n}{N}W_N, W_N\right) = \mathrm{Cov}(W_n, W_N) - \frac{n}{N}\,\mathrm{Cov}(W_N, W_N) = n - \frac{n}{N}N = 0.$$

Comme $(W_n - \frac{n}{N}W_N, W_N)$ est un vecteur gaussien (ses coordonnées sont des combinaisons linéaires des $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ qui sont des gaussiennes indépendantes), le fait que ses coordonnées aient une covariance nulle implique leur indépendance.

4. On a

$$\varphi(W_n) = \varphi\left(W_n - \frac{n}{N}W_N + \frac{n}{N}W_N\right) = f\left(W_n - \frac{n}{N}W_N, W_N\right),$$

où f est définie par

$$f(x,y) = \varphi\left(x + \frac{n}{N}W_N\right).$$

Or, on sait que pour deux variables indépendantes X et Y, on a

$$\mathbb{E}(f(X,Y)|Y) = F(Y),$$

où F est définie par $F(y) = \mathbb{E}(f(X,y))$. Ici, les variables $W_n - \frac{n}{N}W_N$ et W_N sont bien indépendantes, ce qui permet d'appliquer cette formule.

5. Soit $0 \leqslant n \leqslant m \leqslant N$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(B_n, B_m) =& \mathrm{Cov}\left(W_n - \frac{n}{N}W_N, W_m - \frac{m}{N}W_N\right)\\
=& \mathrm{Cov}(W_n, W_m) - \frac{n}{M}\,\mathrm{Cov}(W_N, W_m) - \frac{m}{N}\,\mathrm{Cov}(W_n, W_N) + \frac{nm}{N^2}\,\mathrm{Cov}(W_N, W_N)\\
=& n - \frac{n}{M}\times m - \frac{m}{N}\times n + \frac{nm}{N^2}\times N\\
=& n - \frac{nm}{N}\\
=& \frac{n(N-m)}{N}.
\end{aligned}$$

La matrice de covariance de $(B_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est donc donnée par

$$\Gamma^B = \frac{1}{N}\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & (N-1) & (N-2) & (N-3) & \dots & 3 & 2 & 1 & 0\\
0 & (N-2) & 2(N-2) & 2(N-3) & \dots & 2\times 3 & 2\times 2 & 2 & 0\\
0 & (N-3) & 2(N-3) & 3(N-3) & \dots & 3\times 3 & 3\times 2 & 3 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 3 & 2\times 3 & 3\times 3 & \dots & 3(N-3) & 2(N-3) & (N-3) & 0\\
0 & 2 & 2\times 2 & 3\times 2 & \dots & 2(N-3) & 2(N-2) & (N-2) & 0\\
0 & 1 & 2 & 3 & \dots & (N-3) & (N-2) & (N-1) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

6. On pose $\tilde{B}_n = B_{N-n}$. La matrice de covariance de $\tilde{B}$ est donnée, pour $0 \leqslant n \leqslant m \leqslant N$, par

$$\Gamma^{\tilde{B}}_{n,m} = \mathrm{Cov}(B_{N-n}, B_{N-m}) = \frac{(N-m)(N-(N-n))}{N} = \frac{(N-m)n}{N} = \Gamma^{B}_{n,m}.$$

La deuxième égalité vient de l'expression de la matrice de covariance de B, en remarquant que $N - m \leqslant N - n$. Les vecteurs $(B_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ et $(\tilde{B}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ sont donc deux vecteurs gaussiens de même moyenne (ils sont centrés) et de même matrice de covariance. Ils ont donc la même loi.