Sorbonne Université — 2021 – 2022
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 29 octobre 2021

Partiel

L'épreuve dure deux heures.
Les trois exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 30 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 9 points (2+2+3+2).

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ceci signifie que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(X = n) = 2^{-n}$.

Soit Y une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X + Y|Y]$.
2. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[(X + Y)^2|Y]$.
3. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[Y|X + Y]$.
4. L'espérance de $2^X Y$ a-t-elle un sens ? Si oui, combien vaut-elle ?

Exercice 2

Barème indicatif : 12 points (2+2+3+3+2).

Soit $(V_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $\mathbb{E}[V_1] = 1$ et que V_1 n'est pas presque sûrement constante.

On pose $Y_0 = 1$, on note $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale, et pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^n V_k$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(V_k, k \leqslant n)$.

1. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et que $\left(\sqrt{Y_n}\right)_{n\geqslant 0}$ est une sur-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $\mathbb{E}\left[\sqrt{V_1}\right] < 1$. (*Attention : on demande une inégalité stricte.*)
3. Montrer que $\left(\sqrt{Y_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers 0.
4. La martingale $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle fermée ?
5. Montrer que $\left(\sqrt{Y_n}\right)_{n\geqslant 0}$ est une sur-martingale bornée dans L^2 et qui ne converge pas dans L^2.

Exercice 3

Barème indicatif : 14 points (2+2+2+3+2+3).

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées et de variance 1. On pose $W_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration engendrée par $(W_n)_{n\geqslant 0}$.

1. Quelle est la loi de W_n ? Montrer que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

On fixe un entier $N \geqslant 0$.

2. Calculer la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(W_0, W_1, \ldots, W_N)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, $W_n - \frac{n}{N} W_N$ est indépendante de W_N.
4. Montrer que pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, on a
$$\mathbb{E}[\varphi(W_n)|W_N] = \Phi_n(W_N),$$
où la fonction $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par
$$\Phi_n(t) = \mathbb{E}\left[\varphi\Big(W_n - \frac{n}{N} W_N + \frac{n}{N} t\Big)\right].$$
5. On pose $B_n = W_n - \frac{n}{N} W_N$. Donner la matrice de covariance de $(B_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$.
6. Montrer que les vecteurs aléatoires $(B_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ et $(B_{N-n})_{0\leqslant n\leqslant N}$ ont même loi.

—— Fin du sujet ——