Sorbonne Université — 2021 – 2022
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 31 mai 2022

# Examen – Session 2

*L'épreuve dure trois heures.*
*Les quatre exercices sont indépendants.*
*Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.*
*Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 points.*

## Exercice 1

*Barème indicatif : 10 points (3+3+4).*
*Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.*
*Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.*

**1.** Soit $T$ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On note $\lfloor T \rfloor$ la partie entière de $T$.

Déterminer une fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}\big[T \big| \lfloor T \rfloor\big] = h(\lfloor T \rfloor)$.

**2.** Soit $C$ une variable aléatoire de loi de Cauchy, c'est-à-dire dont la loi admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la densité

$$x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

Calculer $\mathbb{E}\big[f(C) \big| C^2\big]$.

**3.** Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x\}$. Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, la densité

$$(x, y) \mapsto c e^{-x} \mathbf{1}_D(x, y),$$

où $c$ est une constante.

Déterminer la valeur de $c$, puis calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X]$.

## Exercice 2

*Barème indicatif : 20 points (3+3+3+3+3+2+3).*

Sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 0}$ indépendantes. On suppose que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}\big[X_n^2\big] < \infty$ et $\mathbb{E}[X_n] = 0$. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $v_n = \mathrm{Var}(X_n)$ et on pose $M_n = X_0 + \ldots + X_n$.

**1.** Montrer que si la série de terme général $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, alors la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge, dans un ou des sens que l'on précisera.

Dans les cinq questions qui suivent (les questions 2 à 6), on va démontrer une réciproque de cet énoncé. La question 7 propose une application de nos résultats.

On ne suppose plus que la série de terme général $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge. On fait par contre désormais l'hypothèse qu'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, on ait $\mathbb{P}(|X_n| \leqslant C) = 1$. Autrement dit, toutes les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sont bornées par la constante $C$.

**2.** Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $A_n = v_0 + \ldots + v_n$. Montrer que la suite $(M_n^2 - A_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

Soit $x > 0$ un réel. On définit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geqslant 0 : |M_n| > x\}$. On définit par ailleurs $A_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$, qui est un élément de $[0, +\infty]$.

**3.** Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $|M_{T\wedge n}| \leqslant x + C$.

**4.** Montrer que $A_\infty \mathbb{P}(T = \infty) \leqslant \mathbb{E}[A_T] \leqslant (x + C)^2$.

On fait maintenant l'hypothèse que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement.

**5.** Montrer qu'il est possible de choisir le réel $x > 0$ de telle sorte que $\mathbb{P}(T = \infty) > 0$.

**6.** En déduire que la série de terme général $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

**7.** Soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Étudier la convergence des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}.$$

## Exercice 3

*Barème indicatif : 20 points (2+2+3+3+2+3+2+3).*

Soit $p$ un réel tel que $0 < p < \frac{1}{2}$. On pose $q = 1 - p$. Sur $\mathbb{Z}$, on se donne le noyau de transition markovien $P$ défini comme suit : pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $P(i, i+1) = p$, $P(i, i-1) = q$ et $P(i, j) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ tel que $|i - j| \neq 1$. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{Z}}, (X_n)_{n\geqslant 0})$ de noyau de transition $P$.

**1.** Rappeler sans démonstration quel est le comportement asymptotique de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sous $\mathbb{P}_0$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $\pi_i = \mathbb{P}_0(\exists n \geqslant 0, X_n = i)$.

**2.** Calculer $\pi_i$ pour tout $i \leqslant 0$.

**3.** Pour $i > 0$, établir une relation linéaire entre $\pi_{i-1}$, $\pi_i$ et $\pi_{i+1}$.

**4.** Calculer $\pi_i$ pour tout $i > 0$.

**5.** Déterminer la loi sous $\mathbb{P}_0$ de $M = \max\{X_n : n \geqslant 0\}$.

**6.** Montrer que $\mathbb{P}_0(\forall n \geqslant 1, X_n \leqslant -1) = q - p$.

**7.** Calculer, sous $\mathbb{P}_0$, le nombre moyen de visites en 0 de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire, avec les notations du cours, $\mathbb{E}_0[N_0]$.

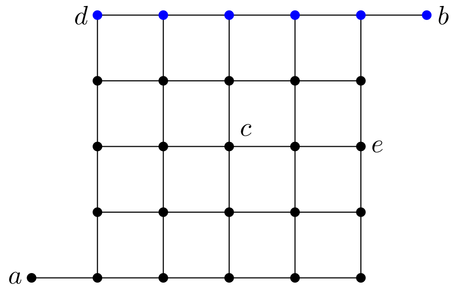
Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $T_i = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = i\}$ le premier temps de passage en $i$. On considère l'événement $A = \{\exists! n \geqslant 0, X_n = M\}$ où la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ n'atteint qu'une fois sa plus grande valeur.

**8.** Expliquer l'égalité $A = \displaystyle\bigsqcup_{i\geqslant 0} \big\{T_i < \infty \ \text{ et } \ \forall n \geqslant T_i + 1,\ X_n \leqslant i - 1\big\}$, où l'union est disjointe, et l'utiliser pour calculer la probabilité $\mathbb{P}_0(A)$.

## Exercice 4

*Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).*

On considère une marche au hasard sur le graphe représenté ci-dessous (la couleur des sommets n'a pas de signification et ne sert qu'à identifier des sommets à la question 4) :




**1.** Déterminer, pour chaque probabilité invariante $\pi$ pour cette marche au hasard, la valeur du quintuplet $(\pi(a), \pi(b), \pi(c), \pi(d), \pi(e))$.

**2.** Partant du sommet $a$, combien de temps met en moyenne la marche à y revenir ?

**3.** Entre deux visites en $a$, combien de fois la marche visite-t-elle en moyenne $c$ ? Et combien de fois $d$ ?

**4.** On fait partir la marche du sommet $a$ et on la laisse évoluer pendant un temps long. Quelle est, asymptotiquement, la proportion du temps que la marche passe dans l'ensemble de six sommets bleus situés sur la ligne supérieure du graphe, celle qui relie $d$ à $b$ ?

**5.** On fait partir du sommet $a$ un très grand nombre de marcheurs qui évoluent indépendamment les uns des autres. Au bout d'un temps long, la proportion de ces marcheurs qui se trouvent sur le sommet $e$ admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

——— Fin du sujet ———

## Solution de l'exercice 1

1. La variable aléatoire $\lfloor T \rfloor$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, si bien que la tribu $\sigma(\lfloor T \rfloor)$ est engendrée par la partition dénombrable

$$\Omega = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \{\lfloor T \rfloor = n\}.$$

Dans ce cas (où la tribu est engendrée par une partition dénombrable de l'espace de probabilité), on a une formule explicite pour l'espérance conditionnelle (qui existe car $T$ est intégrable), à savoir

$$\mathbb{E}\big[T \big| \lfloor T \rfloor\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[T\mathbf{1}_{\{\lfloor T \rfloor = n\}}]}{\mathbb{P}(\lfloor T \rfloor = n)} \mathbf{1}_{\{\lfloor T \rfloor = n\}}.$$

Or pour tout $n \geqslant 0$, on a d'une part

$$\mathbb{P}(\lfloor T \rfloor = n) = \int_n^{n+1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = e^{-n}(1 - e^{-1})$$

et d'autre part

$$\mathbb{E}[T\mathbf{1}_{\{\lfloor T \rfloor = n\}}] = \int_n^{n+1} te^{-t}\, \mathrm{d}t = \big[-(1+t)e^{-t}\big]_n^{n+1} = e^{-n}\big((n+1) - (n+2)e^{-1}\big),$$

si bien que

$$\mathbb{E}\big[T \big| \lfloor T \rfloor\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \big(n + 1 - \tfrac{1}{e-1}\big) \mathbf{1}_{\{\lfloor T \rfloor = n\}}.$$

Ainsi, la fonction $h$ définie par

$$\boxed{h(n) = n + 1 - \tfrac{1}{e-1}}$$

convient.

2. L'espérance conditionnelle cherchée existe, car la variable aléatoire $f(C)$ est bornée, donc intégrable.

Appliquons la méthode de la fonction muette. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a, en utilisant la parité de la densité de la loi de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(C)g(C^2)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)} \\
&= \int_0^{+\infty} \big(f(x) + f(-x)\big)g(x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)} \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(f\big(\sqrt{x^2}\big) + f\big(-\sqrt{x^2}\big)\Big)g(x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f\big(\sqrt{x^2}\big) + f\big(-\sqrt{x^2}\big)}{2} g(x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)},
\end{aligned}$$

si bien que

$$\boxed{\mathbb{E}\big[f(C)\big|C^2\big] = \frac{f\big(\sqrt{C^2}\big) + f\big(-\sqrt{C^2}\big)}{2}}$$

3. Pour calculer $c$, on écrit que l'intégrale de la densité sur $\mathbb{R}^2$ vaut 1. Ainsi,

$$1 = c\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x}\mathbf{1}_D(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \mathrm{d}y\right)e^{-x}\, \mathrm{d}x = c\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, \mathrm{d}x = c,$$

donc

$$\boxed{c = 1}$$

Les lois de $X$ et $Y$ admettent des densités par rapport à la mesure de Lebesgue, qu'on obtient en intégrant la densité de la loi du couple par rapport à une ou l'autre variable. Ainsi, la loi de $X$ admet la densité

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}\mathbf{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}y = xe^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

et celle de $Y$ la densité

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}\mathbf{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}x = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\int_y^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

En particulier, $X$ et $Y$ sont intégrables, et les deux espérances conditionnelles cherchées existent. On a donc

$$\mathbb{E}[X|Y] = \frac{\int_{\mathbb{R}} xe^{-x}\mathbf{1}_D(x,Y)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} e^{-x}\mathbf{1}_D(x,Y)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_{\mathbb{R}} xe^{-x}\mathbf{1}_D(x,Y)\,\mathrm{d}x}{f_Y(Y)} = e^Y\int_Y^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = Y+1$$

et

$$\mathbb{E}[Y|X] = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-X}\mathbf{1}_D(X,y)\,\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}} e^{-y}\mathbf{1}_D(X,y)\,\mathrm{d}y} = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-X}\mathbf{1}_D(X,y)\,\mathrm{d}y}{f_X(X)} = \frac{e^{-X}}{Xe^{-X}}\int_0^X \mathrm{d}y = \frac{X}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}[X|Y] = Y+1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[Y|X] = \frac{X}{2}}$$

**Solution de l'exercice 2**

1. Pour tout $n \geqslant 0$, posons $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0,\ldots,X_n)$. La suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires intégrables (car chacune somme finie de variables aléatoire admettant un moment d'ordre 2), adaptée à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, et qui vérifie

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[M_n + X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = M_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = M_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = M_n.$$

Autrement dit, la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. C'est même une martingale $L^2$, au sens où chaque variable aléatoire $M_n$ admet un moment d'ordre 2. Plus précisément,

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathrm{Var}(M_n) = \mathrm{Var}(X_0+\ldots+X_n) = v_0+\ldots+v_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

L'hypothèse que la série de terme général $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge entraîne donc que la martingale $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans $L^2$. D'après un théorème du cours, elle converge donc presque sûrement et dans $L^2$.

2. Pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire $M_n^2 - A_n$ est intégrable, comme somme d'une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre 2 et d'une constante, et elle est $\mathscr{F}_n$-mesurable. De plus, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}^2 - A_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[M_n^2 + 2M_nX_{n+1} + X_{n+1}^2 - A_n - v_{n+1}|\mathscr{F}_n]\\ &= M_n^2 - A_n + 2M_n\underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1}]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1}^2] - v_{n+1}}_{=0}\\ &= M_n^2 - A_n.\end{aligned}$$

Ceci achève de démontrer que $(M_n^2 - A_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

3. De deux choses l'une : soit $n < T$, auquel cas, par définition de $T$, $|M_n|$ n'a pas encore dépassé la valeur $x$ ; soit $n \geqslant T$, auquel cas $T \wedge n = T$, et $|M_T| = |M_{T-1} + X_T|$ n'excède pas

$|M_{T-1}|+C$, donc n'excède pas $x+C$. Écrivons cela précisément, en tenant aussi compte du cas un peu particulier où $T=0$ :

$$\begin{aligned}|M_{T\wedge n}| &= |M_{T\wedge n}|\mathbf{1}_{\{n<T\}} + |M_{T\wedge n}|\mathbf{1}_{\{T=0\}} + |M_{T\wedge n}|\mathbf{1}_{\{n\geqslant T\geqslant 1\}}\\ &= |M_n|\mathbf{1}_{\{n<T\}} + |M_0|\mathbf{1}_{\{T=0\}} + |M_T|\mathbf{1}_{\{n\geqslant T\geqslant 1\}}\\ &\leqslant |M_n|\mathbf{1}_{\{n<T\}} + |X_0|\mathbf{1}_{\{T=0\}} + (|M_{T-1}|+|X_T|)\mathbf{1}_{\{n\geqslant T\geqslant 1\}}\\ &\leqslant x\mathbf{1}_{\{n<T\}} + C\mathbf{1}_{\{T=0\}} + (x+C)\mathbf{1}_{\{n\geqslant T\geqslant 1\}}\\ &\leqslant x+C.\end{aligned}$$

4. Le processus arrêté $(M_{T\wedge n}^2 - A_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ de la martingale $(M_n^2 - A_n)_{n\geqslant 0}$ est encore une martingale, si bien que pour tout $n\geqslant 0$, on a

$$\mathbb{E}[M_{T\wedge n}^2 - A_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[M_0^2 - A_0] = 0.$$

On voudrait ici écrire que $\mathbb{E}[M_{T\wedge n}^2] = \mathbb{E}[A_{T\wedge n}]$, mais le fait que la différence $M_{T\wedge n}^2 - A_{T\wedge n}$ soit intégrable n'entraîne pas automatiquement que $M_{T\wedge n}^2$ et $A_{T\wedge n}$ soient intégrable. Cependant, on sait que $M_{T\wedge n}$, donc $M_{T\wedge n}^2$, est bornée, donc intégrable, et que $A_{T\wedge n}$ est bornée par la constante finie $A_n$, donc également intégrable.

On a donc $0 = \mathbb{E}[M_{T\wedge n}^2 - A_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[M_{T\wedge n}^2] - \mathbb{E}[A_{T\wedge n}]$, si bien que

$$\mathbb{E}[A_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[M_{T\wedge n}^2] \leqslant (C+x)^2.$$

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $T\wedge n$ tend en croissant vers $T$, et $A_{T\wedge n}$ tend en croissant vers $A_T$. Ainsi, par convergence monotone,

$$\mathbb{E}[A_T] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[A_{T\wedge n}] \leqslant (C+x)^2.$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[A_T] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbb{P}(T=n) + A_\infty \mathbb{P}(T=\infty) \geqslant A_\infty \mathbb{P}(T=\infty).$$

5. On suppose que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement. En particulier, elle est bornée presque sûrement (mais attention, la borne peut dépendre de $\omega$ !). En tout cas, en notant, pour tout entier $K\geqslant 0$,

$$B_K = \{\forall n\geqslant 0, |M_n|\leqslant K\}$$

l'événement “la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée par $K$”, on a

$$\Omega = \bigcup_{K=0}^{\infty} B_K.$$

La suite d'événements $(B_K)_{K\geqslant 0}$ est de plus croissante, si bien que

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \lim_{K\to\infty} \mathbb{P}(B_K).$$

En particulier, et c'est tout ce qu'il nous faut savoir, il existe un entier $K_0\geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}(B_{K_0})>0$.

Posons $x=K_0$. Alors sur l'événement $B_{K_0}$, on a $T=\infty$. Autrement dit,

$$\mathbb{P}(T=\infty) \geqslant \mathbb{P}(B_{K_0}) > 0.$$

6. En mettant ensemble les résultats des questions précédentes, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = A_\infty \leqslant \frac{(C+x)^2}{\mathbb{P}(T=\infty)} < +\infty,$$

qui est le résultat cherché.

On a démontré l'énoncé suivant :

*Étant donné une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires indépendantes, centrées, uniformément bornées, la série de variables aléatoires de terme général $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement si et seulement si la série numérique de terme général $(\mathrm{Var}(X_n))_{n\geqslant 0}$ converge.*

7. Dans le cas où $X_n = \frac{\varepsilon_n}{n}$, la série des variances est la série de terme général $1/n^2$, qui converge. La première série converge donc presque sûrement (et dans $L^2$, comme nous l'avons montré à la question 1).

Dans le cas où $X_n = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$, la série des variances est la série harmonique, qui diverge. La deuxième série ne converge donc pas presque sûrement.

La loi du $0-1$ de Kolmogorov permet d'affirmer qu'elle diverge presque sûrement.

On peut aussi montrer qu'elle diverge presque sûrement en reprenant l'exercice à la question 5 et en vérifiant qu'on n'avait pas besoin de supposer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement, mais seulement qu'elle converge avec probabilité positive, pour arriver à la conclusion que $A_\infty < \infty$.

## Solution de l'exercice 3

1. Sous $\mathbb{P}_0$, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ a la loi d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ dont les sauts ont la loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$, qui est d'espérance strictement négative. Il découle donc de la loi forte des grands nombres qu'elle converge presque sûrement vers $-\infty$.

2. Une suite d'entiers consécutifs qui commence à 0 et qui tend vers $-\infty$ contient tous les entiers négatifs. Ainsi, pour tout $i \leqslant 0$, on a $\pi_i = 1$.

3. Soit $t \geqslant 1$. En appliquant la propriété de Markov faible au temps 1, puis en utilisant l'invariance par translation du noyau de transition, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(\exists n \geqslant 0, X_n = i) &= p\mathbb{P}_1(\exists n \geqslant 0, X_n = i) + q\mathbb{P}_{-1}(\exists n \geqslant 0, X_n = i)\\ &= p\mathbb{P}_0(\exists n \geqslant 0, X_n = i-1) + q\mathbb{P}_0(\exists n \geqslant 0, X_n = i+1).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\pi_i = p\pi_{i-1} + q\pi_{i+1}.$$

Pour résoudre cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, on cherche les racines du polynômes $qX^2 - X + p = (X-1)(qX-p)$. Ainsi, il existe deux réels $A$ et $B$ tels que pour tout $i \geqslant 0$, on ait

$$\pi_i = A\Big(\frac{p}{q}\Big)^i + B.$$

La variable aléatoire $M = \max\{X_n : n \geqslant 0\}$ est presque sûrement finie, si bien qu'en nous souvenant que $p < q$, nous trouvons

$$B = \lim_{i\to\infty} \pi_i = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}_0(M \geqslant i) = \mathbb{P}(M = \infty) = 0.$$

Par ailleurs,

$$A = \pi_0 = 1.$$

Finalement, pour tout $i \geqslant 0$,

$$\pi_i = \Big(\frac{p}{q}\Big)^i.$$

5. La variable aléatoire $M$ est entière positive, et pour tout $i \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}(M = i) = \mathbb{P}(M \geqslant i) - \mathbb{P}(M \geqslant i+1) = \pi_i - \pi_{i+1} = \Big(\frac{p}{q}\Big)^i\Big(1 - \frac{p}{q}\Big).$$

6. On cherche la probabilité que la chaîne ne repasse jamais en 0 après le temps 0. Pour cela, il faut que son premier pas soit vers le bas, puis que la trajectoire de la chaîne à partir du temps 1 ait pour maximum $-1$. Ainsi, grâce à la propriété de Markov au temps 1 et à l'invariance par translation du noyau,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(\forall n \geqslant 1, X_n \leqslant -1) &= \mathbb{P}_0(X_1 = -1)\mathbb{P}_{-1}(\forall n \geqslant 0, X_n \leqslant -1) \\ &= \mathbb{P}_0(X_1 = -1)\mathbb{P}_0(\forall n \geqslant 0, X_n \leqslant 0) \\ &= q\Big(1 - \frac{p}{q}\Big) \\ &= q - p.\end{aligned}$$

7. D'après le cours, le nombre moyen de visites en 0 est l'inverse de la probabilité que le premier temps de retour en 0 soit infini, c'est-à-dire l'inverse de la probabilité que nous venons de calculer. Ainsi,

$$\mathbb{E}_0[N_0] = \frac{1}{\mathbb{P}_0(\forall n \geqslant 1, X_n \leqslant -1)} = \frac{1}{q-p}.$$

8. L'événement $A$ est l'événement sur lequel la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ atteint exactement une fois sa plus grande valeur. Sur cet événement, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ atteint pour la première fois sa plus grande valeur, puis n'y revient plus jamais. En décomposant selon la plus grande valeur, notée $i$, de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$, on obtient l'écriture souhaitée.

Soit $i \geqslant 0$. La propriété de Markov forte au temps $T_i$ donne

$$\mathbb{P}_0(T_i < \infty \text{ et } \forall n \geqslant T_i + 1, X_n \leqslant i - 1) = \mathbb{P}_i(\forall n \geqslant 1, X_n \leqslant i - 1)\mathbb{P}_0(T_i < \infty)$$

qu'on peut réécrire, grâce à l'invariance par translation du noyau,

$$\mathbb{P}_0(\forall n \geqslant 1, X_n \leqslant -1)\mathbb{P}_0(T_i < \infty) = (q-p)\pi_i.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_0(A) = \sum_{i=0}^{\infty}(q-p)\pi_i = \frac{q-p}{1-\frac{p}{q}} = q.$$

Pour aller plus loin, vous pouvez essayer de montrer que pour tout $k \geqslant 1$, la probabilité que la marche $(X_n)_{n\geqslant 0}$ atteigne exactement $k$ fois sa plus grande valeur est $qp^{k-1}$.

Pour aller encore plus loin, vous pouvez définir la variable aléatoire $L = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = M\}}$, le nombre de fois où la marche atteint sa plus grande valeur, et déterminer la loi du couple $(M, L)$.

### Solution de l'exercice 4

1. Le graphe est fini connexe, donc la marche aléatoire sur ce graphe est irréductible et récurrente positive. Elle admet donc une unique probabilité invariante.

On sait que la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible : en la normalisant, on trouve l'unique probabilité invariante du graphe.

Le seul point délicat est de compter la somme des nombres de voisins de tous les sommets du graphe. Il y en a 84. (Vous pouvez réfléchir au fait que c'est le double du nombre d'arêtes.)

Ainsi,

$$\pi(a) = \pi(b) = \frac{1}{84},\ \pi(c) = \frac{1}{21},\ \pi(d) = \frac{1}{42},\ \pi(e) = \frac{1}{28}.$$

2. Le temps moyen de retour en $a$ est l'inverse de la masse que donne à $a$ l'unique probabilité invariante : c'est donc 84.

3. La mesure qui à un sommet associe le nombre moyen de visites en ce sommet entre deux visites en $a$ est l'unique mesure invariante qui donne à $a$ la masse 1. C'est donc $84\pi$. Ainsi, entre deux visites en $a$, la marche visite en moyenne 4 fois $c$ et 2 fois $d$.

4. Le théorème ergodique nous dit que cette proportion est la masse donnée à cet ensemble de sommet par la mesure $\pi$, c'est-à-dire $\frac{15}{84}$.

5. La période de cette chaîne de Markov est 2 : en effet, en voyant de manière naturelle notre graphe comme un morceau de $\mathbb{Z}^2$, on vérifie qu'à chaque pas, la parité de la somme des deux coordonnées change. Ainsi, l'ensemble des temps en lesquels il est possible de revenir en $a$ partant de $a$ est l'ensemble des entiers pairs.

Il n'y a donc pas convergence en loi de la chaîne vers sa probabilité invariante.