Sorbonne Université | 2021 – 2022
Probabilités approfondies – MU4MA011 | 31 mai 2022

Examen – Session 2

L'épreuve dure trois heures.
Les quatre exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 10 points (3+3+4).
Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.
Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1. Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On note $\lfloor T \rfloor$ la partie entière de T.

Déterminer une fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}\big[T \big| \lfloor T \rfloor\big] = h(\lfloor T \rfloor)$.

2. Soit C une variable aléatoire de loi de Cauchy, c'est-à-dire dont la loi admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la densité

$$x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

Calculer $\mathbb{E}\big[f(C) \big| C^2\big]$.

3. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x\}$. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, la densité

$$(x,y) \mapsto c e^{-x} \mathbf{1}_D(x,y),$$

où c est une constante.

Déterminer la valeur de c, puis calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 20 points (3+3+3+3+3+2+3).

Sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 0}$ indépendantes. On suppose que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}\big[X_n^2\big] < \infty$ et $\mathbb{E}[X_n] = 0$. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $v_n = \mathrm{Var}(X_n)$ et on pose $M_n = X_0 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que si la série de terme général $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, alors la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge, dans un ou des sens que l'on précisera.

Dans les cinq questions qui suivent (les questions 2 à 6), on va démontrer une réciproque de cet énoncé. La question 7 propose une application de nos résultats.

On ne suppose plus que la série de terme général $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge. On fait par contre désormais l'hypothèse qu'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, on ait $\mathbb{P}(|X_n| \leqslant C) = 1$. Autrement dit, toutes les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sont bornées par la constante C.

2. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $A_n = v_0 + \ldots + v_n$. Montrer que la suite $(M_n^2 - A_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

Soit $x > 0$ un réel. On définit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geqslant 0 : |M_n| > x\}$. On définit par ailleurs $A_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$, qui est un élément de $[0, +\infty]$.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $|M_{T\wedge n}| \leqslant x + C$.

4. Montrer que $A_\infty \mathbb{P}(T = \infty) \leqslant \mathbb{E}[A_T] \leqslant (x + C)^2$.

On fait maintenant l'hypothèse que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement.

5. Montrer qu'il est possible de choisir le réel $x > 0$ de telle sorte que $\mathbb{P}(T = \infty) > 0$.

6. En déduire que la série de terme général $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

7. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Étudier la convergence des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 3

Barème indicatif : 20 points (2+2+3+3+2+3+2+3).

Soit p un réel tel que $0 < p < \frac{1}{2}$. On pose $q = 1 - p$. Sur $\mathbb{Z}$, on se donne le noyau de transition markovien P défini comme suit : pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $P(i, i+1) = p$, $P(i, i-1) = q$ et $P(i, j) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ tel que $|i - j| \neq 1$. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{Z}}, (X_n)_{n\geqslant 0})$ de noyau de transition P.

1. Rappeler sans démonstration quel est le comportement asymptotique de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sous $\mathbb{P}_0$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $\pi_i = \mathbb{P}_0(\exists n \geqslant 0, X_n = i)$.

2. Calculer π_i pour tout $i \leqslant 0$.

3. Pour $i > 0$, établir une relation linéaire entre π_{i-1}, π_i et π_{i+1}.

4. Calculer π_i pour tout $i > 0$.

5. Déterminer la loi sous $\mathbb{P}_0$ de $M = \max\{X_n : n \geqslant 0\}$.

6. Montrer que $\mathbb{P}_0(\forall n \geqslant 1, X_n \leqslant -1) = q - p$.

7. Calculer, sous $\mathbb{P}_0$, le nombre moyen de visites en 0 de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire, avec les notations du cours, $\mathbb{E}_0[N_0]$.

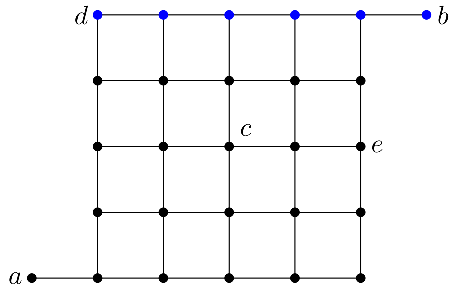
Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $T_i = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = i\}$ le premier temps de passage en i. On considère l'événement $A = \{\exists! n \geqslant 0, X_n = M\}$ où la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ n'atteint qu'une fois sa plus grande valeur.

8. Expliquer l'égalité $A = \bigsqcup_{i\geqslant 0} \big\{T_i < \infty \ \text{ et } \ \forall n \geqslant T_i + 1,\ X_n \leqslant i - 1\big\}$, où l'union est disjointe, et l'utiliser pour calculer la probabilité $\mathbb{P}_0(A)$.

Exercice 4

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On considère une marche au hasard sur le graphe représenté ci-dessous (la couleur des sommets n'a pas de signification et ne sert qu'à identifier des sommets à la question 4) :



1. Déterminer, pour chaque probabilité invariante π pour cette marche au hasard, la valeur du quintuplet $(\pi(a), \pi(b), \pi(c), \pi(d), \pi(e))$.

2. Partant du sommet a, combien de temps met en moyenne la marche à y revenir ?

3. Entre deux visites en a, combien de fois la marche visite-t-elle en moyenne c ? Et combien de fois d ?

4. On fait partir la marche du sommet a et on la laisse évoluer pendant un temps long. Quelle est, asymptotiquement, la proportion du temps que la marche passe dans l'ensemble de six sommets bleus situés sur la ligne supérieure du graphe, celle qui relie d à b ?

5. On fait partir du sommet a un très grand nombre de marcheurs qui évoluent indépendamment les uns des autres. Au bout d'un temps long, la proportion de ces marcheurs qui se trouvent sur le sommet e admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

—————— Fin du sujet ——————