Sorbonne Université — 2021 – 2022
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 18 février 2022

Examen

L'épreuve dure trois heures.
Les cinq exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 *points.*

Exercice 1

Barème indicatif : 10 points (2+3+5).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées, indépendantes et de même loi, dont on notera m l'espérance. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

1. Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.

2. Rappeler la démonstration du fait que si $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$, alors $\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] \geqslant 0) = 1$.

3. Exprimer en fonction de X, Y et m quatre des espérances conditionnelles suivantes (vous n'avez pas d'assez d'informations pour calculer l'une d'entre elles) :

a. $\mathbb{E}[X(1-Y)|\{\varnothing, \Omega\}]$
b. $\mathbb{E}[XY|Y]$
c. $\mathbb{E}[Y|XY]$
d. $\mathbb{E}[X-Y|Y]$
e. $\mathbb{E}[X-Y|XY]$

Exercice 2

Barème indicatif : 10 points.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On fait l'hypothèse qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{\lambda Z_1}] = 1$. Soit $a \geqslant 0$ un réel. Montrer que

$$\mathbb{P}(\forall n \geqslant 1, Z_1 + \ldots + Z_n \leqslant a) \geqslant 1 - e^{-\lambda a}.$$

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (2+2+3+2+3+3).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Enfin, on pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Trouver une fonction simple $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $(S_n^2 - f(n))_{n\geqslant 0}$ soit une martingale.

3. Déterminer la relation qui doit exister entre deux réels α et β pour que $(e^{\alpha S_n - \beta n})_{n\geqslant 0}$ soit une martingale.

Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on définit le temps d'arrêt $T_a = \inf\{n \geqslant 0 : S_n = a\}$.

4. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.

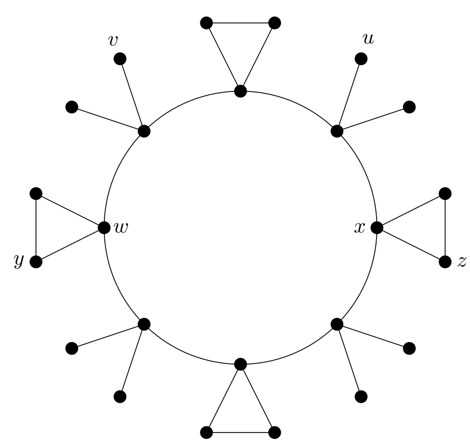
5. Calculer, pour tout entier $a \geqslant 1$ et tout réel $\beta \geqslant 0$, l'espérance $\mathbb{E}[e^{-\beta T_a}]$.

6. Voyez-vous une relation entre les lois de T_1 et T_2 ? Auriez-vous pu la prévoir ?

Exercice 4

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On considère une marche au hasard sur le graphe représenté ci-dessous :



1. Déterminer toutes les probabilités invariantes pour cette marche au hasard.

2. Partant du sommet x, combien de temps met en moyenne la marche à y revenir ?

3. Entre deux visites en x, combien de fois la marche visite-t-elle en moyenne y ? Et combien de fois z ?

4. On fait partir la marche du sommet x et on la laisse évoluer pendant un temps long. Quelle est, asymptotiquement, la proportion du temps que la marche passe dans l'ensemble de huit sommets situés sur le cercle intérieur du graphe ?

5. On fait partir du sommet x un très grand nombre de marcheurs qui évoluent indépendamment les uns des autres. Au bout d'un temps long, la proportion de ces marcheurs qui se trouvent sur le sommet w admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 5

Barème indicatif : 15 points (2+3+3+2+3+2).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on considère un jeu de pile ou face infini, modélisé par une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ de variables indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$. Par convention, on posera $\xi_0 = -1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit

$$L_n = \max\{k \in \{1, \ldots, n\} : \xi_n = \xi_{n-1} = \ldots = \xi_{n-k+1} \text{ et } \xi_{n-k+1} \neq \xi_{n-k}\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'événement $\{\xi_{n+1} = \xi_n\}$ est indépendant de la tribu $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. (*On pourra utiliser le fait que tout élément de cette tribu est une union disjointe d'événements de la forme $\{\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\}$, avec $i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1\}$.*)

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}[f(L_{n+1})|L_1, \ldots, L_n] = \tfrac{1}{2}f(1) + \tfrac{1}{2}f(L_n + 1).$$

3. Décrire la loi de L_n pour tout $n \geqslant 1$. (*On pourra commencer par le faire pour les petites valeurs de n.*)

4. Le résultat de la question 2 montre que $(L_n)_{n \geqslant 1}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ (on ne demande pas de préciser ce point). Décrire la matrice de transition, qu'on notera P, de cette chaîne de Markov.

On suppose qu'on a, sur notre espace de probabilités, une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ de matrice de transition P, pour laquelle on conserve la notation $L = (L_n)_{n \geqslant 1}$. Ceci nous permet de parler de la chaîne issue de x pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, et de noter $\mathbb{P}_x$ la probabilité correspondante. Ainsi, la probabilité $\mathbb{P}$ qu'on a utilisée jusqu'à maintenant, et sous laquelle $L_1 = 1$ presque sûrement, est désormais notée $\mathbb{P}_1$.

On fixe désormais un entier $\ell \geqslant 1$. On définit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geqslant 1 : L_n = \ell\}$. On pose, pour tout $x \geqslant 1$,

$$g(x) = \mathbb{E}_x[T].$$

5. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$ différent de ℓ, on a la relation

$$g(x) = \tfrac{1}{2}g(x + 1) + \tfrac{1}{2}g(1) + 1$$

et en déduire la valeur de $g(1)$ (il sera peut-être nécessaire pour cela de calculer $g(x)$ pour tout $x \in \{1, \ldots, \ell\}$).

6. D'après ce qui précède, mais sans chercher une justification rigoureuse, quel semble être l'ordre de grandeur, lorsque l'on tire un grand nombre n de fois à pile ou face, de la taille de la plus longue série consécutive de résultats identiques ?

——— Fin du sujet ———

Solution de l'exercice 1

Les deux premières questions sont des questions de cours.

1. La variable aléatoire X est bornée, donc elle est intégrable, donc elle admet une espérance conditionnelle, qui est une variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable Z telle que pour tout événement $B \in \mathscr{G}$, on ait

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_B].$$

Deux espérances conditionnelles de X sachant $\mathscr{G}$ sont égales $\mathbb{P}$-presque sûrement.

2. Notons $Z = \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, considérons l'événement

$$B_n = \Big\{Z \leqslant -\frac{1}{n}\Big\}.$$

Cet événement appartient à $\mathscr{G}$, car Z est $\mathscr{G}$-mesurable. De plus, la variable aléatoire $X\mathbf{1}_{B_n}$ est positive. On a donc

$$0 \leqslant \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_n}] = \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{B_n}] \leqslant -\frac{1}{n}\mathbb{P}(B_n).$$

On en déduit que $\mathbb{P}(B_n) \geqslant 0$, si bien que $\mathbb{P}(B_n) = 0$.

En utilisant la sous-additivité de $\mathbb{P}$ (c'est-à-dire le fait que la probabilité d'une réunion dénombrable d'événements est plus petite que la somme des probabilités de ces événements) ou le fait que la suite d'événements $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et le théorème de convergence monotone pour les mesures (c'est-à-dire le fait que la probabilité de l'union d'une suite croissante d'événements est la limite des probabilités de ces événements), on trouve

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\Big) = 0.$$

Or la réunion de la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est

$$\bigcup_{n\geqslant 0} B_n = \{Z < 0\}.$$

En passant au complémentaire, on en déduit que $\mathbb{P}(Z \geqslant 0) = 1$.

3. a. L'espérance conditionnelle sachant la tribu $\{\varnothing, \Omega\}$ est constante, presque sûrement égale à l'espérance. Ainsi,

$$\mathbb{E}[X(1-Y)|\{\varnothing,\Omega\}] = \mathbb{E}[X(1-Y)] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[1-Y] = m(1-m).$$

b. En utilisant la possibilité de sortir de l'espérance conditionnelle un facteur mesurable par rapport à la tribu sachant la quelle on conditionne, puis l'indépendance de X et Y, on trouve

$$\mathbb{E}[XY|Y] = Y\mathbb{E}[X|Y] = Y\mathbb{E}[X] = mY.$$

c. Aucune propriété générale de l'espérance conditionnelle ne semble permettre de calculer celle-ci.

d. En utilisant la linéarité de l'espérance conditionnelle, et l'indépendance de X et de Y, on trouve

$$\mathbb{E}[X-Y|Y] = \mathbb{E}[X|Y] - \mathbb{E}[Y|Y] = \mathbb{E}[X] - Y = m - Y.$$

e. On ne sait pas calculer $\mathbb{E}[X|XY]$, mais on sait que c'est une variable aléatoire de la forme $f(XY)$ pour une certaine fonction borélienne f. Et on sait que si un vecteur aléatoire (U,V) a même loi que (X,XY), alors $\mathbb{E}[U|V] = f(V)$, avec la même fonction f. Or le vecteur aléatoire (Y,XY) a même loi que le vecteur (X,XY). En effet, puisque X et Y sont indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires (X,Y) et (Y,X) ont la même loi ; et les vecteurs aléatoires (X,XY) et (Y,XY) sont respectivement les images des vecteurs aléatoires (X,Y) et (Y,X) par la même fonction $(a,b) \mapsto (a,ab)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, $\mathbb{E}[Y|XY] = f(XY)$. Finalement,

$$\mathbb{E}[X-Y|XY] = \mathbb{E}[X|XY] - \mathbb{E}[Y|XY] = f(XY) - f(XY) = 0.$$

Solution de l'exercice 2

Définissons $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$. Posons $M_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$M_n = e^{\lambda Z_1} \ldots e^{\lambda Z_n}.$$

La suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Puisque la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est croissante, l'inégalité à démontrer est équivalente à l'inégalité

$$\mathbb{P}(\forall n \geqslant 1, M_n \leqslant e^{\lambda a}) \geqslant 1 - e^{-\lambda a},$$

c'est-à-dire, en passant au complémentaire, à l'inégalité

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 1, M_n \geqslant e^{\lambda a}) \leqslant e^{-\lambda a}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, notons $M_n^* = \max(M_0, \ldots, M_n)$. L'inégalité cherchée peut se réécrire encore une fois sous la forme

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 1, M_n^* \geqslant e^{\lambda a}) \leqslant e^{-\lambda a}.$$

L'intérêt de cette reformulation est que la suite d'événements $(\{M_n^* \geqslant e^{\lambda a}\})_{n\geqslant 0}$ est croissante, si bien que

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 1, M_n^* \geqslant e^{\lambda a}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant 0} \{M_n^* \geqslant e^{\lambda a}\}\Big) = \lim_{n\to\infty}\uparrow\ \mathbb{P}(M_n^* \geqslant e^{\lambda a}).$$

La dernière limite étant croissante, elle est inférieure ou égale à $e^{-\lambda a}$ si et seulement si chaque terme de la suite l'est. Autrement dit, ce que nous cherchons à montrer est équivalent à l'assertion

$$\forall n \geqslant 0,\ \mathbb{P}(M_n^* \geqslant e^{\lambda a}) \leqslant e^{-\lambda a}.$$

Or l'inégalité maximale de Doob nous donne, pour tout $n \geqslant 0$,

$$e^{\lambda a}\mathbb{P}(M_n^* \geqslant e^{\lambda a}) \leqslant \mathbb{E}[M_n^+] = \mathbb{E}[M_n] = 1,$$

d'où le résultat se déduit immédiatement.

Solution de l'exercice 3

1. La variable aléatoire S_0 est constante, donc mesurable par rapport à $\mathscr{F}_0$. Pour tout $n \geqslant 1$, la variable aléatoire S_n est une fonction de $\xi_1, \dots, \xi_n$, donc mesurable par rapport à $\mathscr{F}_n$. Le processus $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est donc adapté à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a $|S_n| \leqslant |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| = n$, donc S_n est intégrable.

Enfin, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + \xi_{n+1}|\mathscr{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = S_n,$$

où nous avons utilisé le fait que ξ_{n+1} est indépendante de $\mathscr{F}_n$.

Ces trois propriétés constituent la définition du fait que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Puisque S_n est bornée pour tout $n \geqslant 0$, elle est de carré intégrable. Calculons, pour $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[(S_n + \xi_{n+1})^2|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[S_n^2 + 2S_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2|\mathscr{F}_n].$$

En utilisant encore l'indépendance de ξ_{n+1} par rapport à $\mathscr{F}_n$, et le fait que $\xi_{n+1}^2 = 1$, on trouve

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathscr{F}_n] = S_n^2 + S_n\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n] + 1 = S_n^2 + 1.$$

En retirant $n+1$ à chaque membre de l'égalité, on trouve

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathscr{F}_n] = S_n^2 - n.$$

Autrement dit, la suite $(S_n^2 - n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

3. Donnons-nous un réel α un entier $n \geqslant 1$, et calculons $\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathscr{F}_n]$. Nous trouvons, en utilisant l'indépendance de ξ_{n+1}, et donc de $e^{\alpha\xi_{n+1}}$ par rapport à $\mathscr{F}_n$,

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[e^{\alpha S_n}e^{\alpha\xi_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n}\mathbb{E}[e^{\alpha\xi_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n}\mathbb{E}[e^{\alpha\xi_{n+1}}] = e^{\alpha S_n}\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}.$$

On reconnaît le cosinus hyperbolique de α, c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n}\operatorname{ch}\alpha.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $(\operatorname{ch}\alpha)^{n+1}$, on trouve

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}}(\operatorname{ch}\alpha)^{-(n+1)}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n}(\operatorname{ch}\alpha)^{-n}.$$

Le nombre $\operatorname{ch}\alpha$ est strictement positif : notons β son logarithme, de sorte que $e^{\beta} = \operatorname{ch}\alpha$. Alors la relation précédente s'écrit

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}-(n+1)\beta}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n - n\beta}.$$

Ainsi, pourvu que la relation $\beta = \ln \operatorname{ch} \alpha$ ait lieu, la suite $(e^{\alpha S_n - \beta n})_{n \geqslant 0}$ est une martingale.

4. La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$, de noyau de transition $P(i,j) = \frac{1}{2}$ si $|i-j| = 1$, et $P(i,j) = 0$ sinon. On sait que cette chaîne est irréductible et récurrente. En particulier, partant de n'importe quel point, en particulier partant de 0, elle visite tous les entiers, en particulier l'entier a. Ainsi, T_a est fini presque sûrement.

5. Soit $a \in \mathbb{Z}$ un entier. Soit $\beta \geqslant 0$ un réel. Le réel e^β est supérieur ou égal à 1, il existe donc un réel α tel que $e^\beta = \operatorname{ch} \alpha$. Si $\beta > 0$, il en existe exactement deux, opposés l'un de l'autre : choisissons celui qui est positif.

Pour tout entier $k \geqslant 0$, appliquons le théorème d'arrêt à la martingale $(e^{\alpha S_n - \beta n})_{n\geqslant 0}$ et au temps d'arrêt $\min(T_a, k)$. On trouve

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{T_a \wedge k} - \beta(T_a \wedge k)}] = \mathbb{E}[e^{\alpha S_0 - \beta 0}] = 1.$$

Puisque T_a est fini presque sûrement, lorsque k tend vers l'infini, $e^{\alpha S_{T_a \wedge k} - \beta(T_a \wedge k)}$ tend presque sûrement vers $e^{\alpha S_{T_a} - \beta T_a}$.

Puisque $a \geqslant 1$, on a $S_{T_a \wedge k} \leqslant a$ pour tout $k \geqslant 0$. Comme $\alpha \geqslant 0$, on a pour tout $k \geqslant 0$

$$e^{\alpha S_{T_a \wedge k} - \beta(T_a \wedge k)} \leqslant e^{\alpha a}.$$

La convergence presque sûre est donc dominée, et on peut passer à la limite dans l'espérance, pour trouver

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{T_a} - \beta T_a}] = 1.$$

Or $S_{T_a} = a$, donc

$$\mathbb{E}[e^{-\beta T_a}] = e^{a\alpha} = e^{a \operatorname{argch}(e^\beta)}.$$

6. Notons $s = e^{-\beta}$, qui varie dans $[0,1]$ lorsque β varie dans $\mathbb{R}^+$. On a montré à la question précédente que pour tout $s \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}[s^{T_a}] = e^{a \operatorname{argch}(1/s)}.$$

Nous avons donc déterminé la fonction génératrice de T_a, qui caractérise sa loi.

Nous observons que

$$\mathbb{E}[s^{T_2}] = e^{2 \operatorname{argch}(1/s)} = \mathbb{E}[s^{T_1}]^2.$$

Ainsi, T_2 a même loi que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de même loi que T_1.

En regardant la marche aléatoire comme une chaîne de Markov, ceci peut se démontrer en écrivant

$$T_2 = T_1 + \widehat{T}_1(\theta_{T_1}(X))$$

et en appliquant la propriété de Markov forte au temps T_1, ou le résultat qui affirme que puisque $S_{T_1} = 1$, la trajectoire $\theta_{T_1}(X)$ est indépendante de $\mathscr{F}_{T_1}$ sous $\mathbb{P}_0$, et de loi $\widehat{\mathbb{P}}_1$.

Solution de l'exercice 4

1. La marche au hasard sur ce graphe est une chaîne de Markov sur l'ensemble des sommets du graphe. Comme le graphe est connexe, la marche est irréductible, et comme il est fini, elle est irréductible récurrente positive.

On sait que la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est une mesure réversible, donc invariante. Puisque la chaîne est irréductible, on sait que c'est son unique probabilité invariante.

Il y a trois sortes de sommets dans ce graphe : les huits sommets intérieurs qui sont sur le cercle, comme x et w, les huit sommets extérieurs qui sont sur un triangle, comme z et y, et les huit sommets extérieurs qui sont sur un V, comme u et v. Ces sommets sont respectivement de degré 4, 2 et 1.

En normalisant la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins, on voit que la probabilité invariante donne une masse $\frac{4}{56} = \frac{1}{14}$ aux sommets intérieurs comme x, une masse $\frac{2}{56} = \frac{1}{28}$ aux sommets extérieurs comme z, et une masse $\frac{1}{56}$ aux sommets extérieurs comme u.

2. Partant de x, la marche met en moyenne un temps

$$\mathbb{E}_x[T_x] = \frac{1}{\pi(x)} = 14$$

à revenir en x.

3. Le nombre moyen de visites en un somment entre deux visites en x est l'unique mesure invariante qui associe à x la masse 1. C'est donc $\frac{\pi}{\pi(x)}$.

Entre deux visites en x, le nombre moyen de visites en y est donc de

$$\frac{\pi(y)}{\pi(x)} = \frac{1}{2}.$$

4. La théorème ergodique permet d'affirmer que la proportion du temps que passe la chaîne sur l'ensemble des sommets intérieurs est la masse donnée par la probabilité invariante à cet ensemble de sommets, c'est-à-dire $8 \times \frac{1}{14} = \frac{4}{7}$.

5. On a $P^2(x,x) > 0$ et $P^3(x,x) > 0$, et 2 et 3 sont premiers entre eux, donc la chaîne est apériodique. Le théorème de convergence vers la mesure invariante assure donc que la distribution de la chaîne converge vers sa probabilité invariante. En particulier, la proportion des marcheurs qui se trouvent en w tend vers $\pi(w) = \frac{1}{14}$.

Solution de l'exercice 5

1. Considérons un entier $n \geqslant 1$ et $i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\} \cap \{\xi_{n+1} = \xi_n\}) &= \mathbb{P}(\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n, \xi_{n+1} = i_n) \\ &= 2^{-n-1} \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n)\mathbb{P}(\xi_{n+1} = \xi_n).\end{aligned}$$

L'événement $\{\xi_{n+1} = \xi_n\}$ est donc indépendant de tout événement qui s'écrit comme union disjointe d'événements de la forme $\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\}$, donc de la tribu engendrée par $\xi_1, \dots, \xi_n$.

On a utilisé, ici, le fait que si A, B et C sont trois événements, si A est indépendant de B, A est indépendant de C, et si B et C sont disjoints, alors A est indépendant de $B \cup C$, car

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cup C)) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C).\end{aligned}$$

2. Sur l'événement $\{\xi_{n+1} = \xi_n\}$, on a $L_{n+1} = L_n + 1$ et sur l'évenement $\{\xi_{n+1} \neq \xi_n\}$, on a $L_{n+1} = 1$. Ainsi, pour tout fonction mesurable bornée f, on a

$$f(L_{n+1}) = f(L_n + 1)\mathbf{1}_{\{\xi_{n+1}=\xi_n\}} + f(1)\mathbf{1}_{\{\xi_{n+1}\neq\xi_n\}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(L_{n+1})|L_1, \ldots, L_n] &= f(L_n + 1)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\xi_{n+1}=\xi_n\}}|L_1, \ldots, L_n] + f(1)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\xi_{n+1}\neq\xi_n\}}|L_1, \ldots, L_n] \\ &= f(L_n + 1)\mathbb{P}(\xi_{n+1} = \xi_n) + f(1)\mathbb{P}(\xi_{n+1} \neq \xi_n)] \\ &= \tfrac{1}{2}f(L_n + 1) + \tfrac{1}{2}f(1).\end{aligned}$$

3. La loi de L_n est portée par $\{1, \ldots, n\}$. On a $L_1 = 1$. Pour $n = 2$, on a

$$\mathbb{E}[f(L_2)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(L_2)|L_1]] = \mathbb{E}[\tfrac{1}{2}f(L_1 + 1) + \tfrac{1}{2}f(1)] = \tfrac{1}{2}f(2) + \tfrac{1}{2}f(1).$$

Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(L_3)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(L_3)|L_1, L_2]] \\ &= \mathbb{E}[\tfrac{1}{2}f(L_2 + 1) + \tfrac{1}{2}f(2)] \\ &= \tfrac{1}{4}f(3) + \tfrac{1}{4}f(2) + \tfrac{1}{2}f(1).\end{aligned}$$

On peut mettre dans un tableau les probabilités $\mathbb{P}(L_n = k)$, ici pour $n \leqslant 5$:

	1	2	3	4	5
L_1	1				
L_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
L_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
L_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
L_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

et faire la conjecture que

$$\mathbb{P}(L_n = k) = 2^{-\min(k,n-1)}.$$

La relation démontrée à la question précédente montre que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(L_n = 1) = \frac{1}{2}$ et que pour tous $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$, on a

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(L_{n-1} = k - 1).$$

On vérifie sans peine que l'expression donnée ci-dessus de $\mathbb{P}(L_n = k)$ est l'unique solution de ces équations.

4. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(i,j) = \mathbb{P}(L_{n+1} = j | L_n = i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = i+1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De l'entier i, on saute avec probabilité $\frac{1}{2}$ à $i+1$ ou à 1.

5. Notons $E = \mathbb{N}^*$ l'espace d'états de notre chaîne de Markov et notons, sur l'espace canonique $E^{\mathbb{N}^*}$,

$$\widehat{T} = \inf\{n \geqslant 1 : \widehat{X}_n = \ell\},$$

où on a noté $(\widehat{X}_n)_{n \geqslant 1}$ le processus canonique. Attention, le temps commence ici à 1 alors que dans le cours il commençait à 0. On a donc

$$L_n = \widehat{X}_n(L) \text{ et } T = \widehat{T}(L).$$

En regardant ce qui se passe au premier pas de la marche, on voit que, pourvu que $x \neq \ell$,

$$\widehat{T} = 1 + \widehat{T} \circ \theta_1.$$

Appliquons la propriété de Markov au temps 1 : on a

$$\begin{aligned} g(x) = \mathbb{E}_x[T] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\widehat{T}(L) | \mathscr{F}_1]] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[1 + \widehat{T}(\theta_1(L)) | \mathscr{F}_1]] \\ &= 1 + \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{L_2}[\widehat{T}(L)]] \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_1[\widehat{T}(L)] + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_{x+1}[\widehat{T}(L)] \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}g(x+1) + \tfrac{1}{2}g(1), \end{aligned}$$

ce qui est la relation cherchée.

On a bien entendu $g(\ell) = 1$, puisque $\mathbb{P}_\ell$-presque sûrement, $T = 1$.

En appliquant la relation à $x = 1$, on trouve

$$g(1) = g(2) + 2.$$

En l'appliquant en $x = 2$ et en utilisant la relation entre $g(1)$ et $g(2)$, on trouve

$$g(2) = g(3) + 4.$$

Au cran suivant, on trouve

$$g(3) = g(4) + 8.$$

On devine que $g(x) = g(x+1) + 2^x$ pour tout $x < \ell$, si bien que pour tout $x \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$,

$$g(x) = 2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{\ell-1} + 1 = 2^\ell - 2^x + 1.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[T] = g(1) = 2^\ell - 1.$$

6. Nous venons de démontrer que lorsqu'on tire à pile ou face, il faut attendre en moyenne le $(2^\ell - 1)$-ième tirage pour voir apparaître une suite consécutive de ℓ tirages identiques, ℓ piles ou ℓ faces.

En inversant la relation entre le nombre de tirages $n = 2^\ell - 1$ et la longueur maximale ℓ d'une série de tirages consécutifs identiques, on a

$$\ell = \log_2(n+1) \simeq \log_2 n.$$

Ainsi, on s'attend à ce que l'ordre de grandeur de la longueur de la plus grande série de tirages identiques consécutifs parmi n tirages à pile où face soit $\log_2 n$.