Sorbonne Université — 2021 – 2022
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 18 février 2022

Examen

L'épreuve dure trois heures.
Les cinq exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 *points.*

Exercice 1

Barème indicatif : 10 points (2+3+5).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées, indépendantes et de même loi, dont on notera m l'espérance. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

1. Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.
2. Rappeler la démonstration du fait que si $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$, alors $\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] \geqslant 0) = 1$.
3. Exprimer en fonction de X, Y et m quatre des espérances conditionnelles suivantes (vous n'avez pas d'assez d'informations pour calculer l'une d'entre elles) :

a. $\mathbb{E}[X(1-Y)|\{\varnothing, \Omega\}]$
b. $\mathbb{E}[XY|Y]$
c. $\mathbb{E}[Y|XY]$
d. $\mathbb{E}[X-Y|Y]$
e. $\mathbb{E}[X-Y|XY]$

Exercice 2

Barème indicatif : 10 points.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On fait l'hypothèse qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{\lambda Z_1}] = 1$. Soit $a \geqslant 0$ un réel. Montrer que

$$\mathbb{P}(\forall n \geqslant 1, Z_1 + \ldots + Z_n \leqslant a) \geqslant 1 - e^{-\lambda a}.$$

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (2+2+3+2+3+3).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Enfin, on pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Trouver une fonction simple $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $(S_n^2 - f(n))_{n\geqslant 0}$ soit une martingale.

3. Déterminer la relation qui doit exister entre deux réels α et β pour que $(e^{\alpha S_n - \beta n})_{n\geqslant 0}$ soit une martingale.

Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on définit le temps d'arrêt $T_a = \inf\{n \geqslant 0 : S_n = a\}$.

4. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.

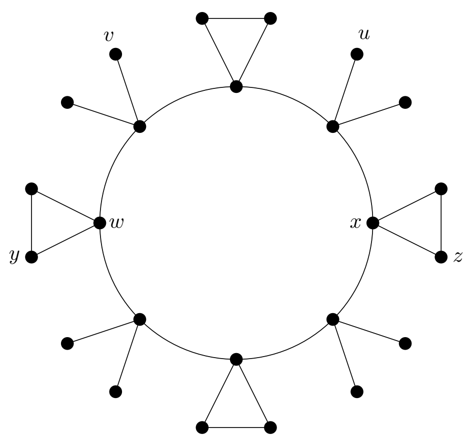
5. Calculer, pour tout entier $a \geqslant 1$ et tout réel $\beta \geqslant 0$, l'espérance $\mathbb{E}[e^{-\beta T_a}]$.

6. Voyez-vous une relation entre les lois de T_1 et T_2 ? Auriez-vous pu la prévoir ?

Exercice 4

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On considère une marche au hasard sur le graphe représenté ci-dessous :



1. Déterminer toutes les probabilités invariantes pour cette marche au hasard.

2. Partant du sommet x, combien de temps met en moyenne la marche à y revenir ?

3. Entre deux visites en x, combien de fois la marche visite-t-elle en moyenne y ? Et combien de fois z ?

4. On fait partir la marche du sommet x et on la laisse évoluer pendant un temps long. Quelle est, asymptotiquement, la proportion du temps que la marche passe dans l'ensemble de huit sommets situés sur le cercle intérieur du graphe ?

5. On fait partir du sommet x un très grand nombre de marcheurs qui évoluent indépendamment les uns des autres. Au bout d'un temps long, la proportion de ces marcheurs qui se trouvent sur le sommet w admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 5

Barème indicatif : 15 points (2+3+3+2+3+2).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on considère un jeu de pile ou face infini, modélisé par une suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de variables indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$. Par convention, on posera $\xi_0 = -1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit

$$L_n = \max\{k \in \{1, \dots, n\} : \xi_n = \xi_{n-1} = \ldots = \xi_{n-k+1} \text{ et } \xi_{n-k+1} \neq \xi_{n-k}\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'événement $\{\xi_{n+1} = \xi_n\}$ est indépendant de la tribu $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. (*On pourra utiliser le fait que tout élément de cette tribu est une union disjointe d'événements de la forme $\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\}$, avec $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$.*)

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}[f(L_{n+1})|L_1, \dots, L_n] = \tfrac{1}{2}f(1) + \tfrac{1}{2}f(L_n + 1).$$

3. Décrire la loi de L_n pour tout $n \geqslant 1$. (*On pourra commencer par le faire pour les petites valeurs de n.*)

4. Le résultat de la question 2 montre que $(L_n)_{n\geqslant 1}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ (on ne demande pas de préciser ce point). Décrire la matrice de transition, qu'on notera P, de cette chaîne de Markov.

On suppose qu'on a, sur notre espace de probabilités, une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ de matrice de transition P, pour laquelle on conserve la notation $L = (L_n)_{n\geqslant 1}$. Ceci nous permet de parler de la chaîne issue de x pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, et de noter $\mathbb{P}_x$ la probabilité correspondante. Ainsi, la probabilité $\mathbb{P}$ qu'on a utilisée jusqu'à maintenant, et sous laquelle $L_1 = 1$ presque sûrement, est désormais notée $\mathbb{P}_1$.

On fixe désormais un entier $\ell \geqslant 1$. On définit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geqslant 1 : L_n = \ell\}$. On pose, pour tout $x \geqslant 1$,

$$g(x) = \mathbb{E}_x[T].$$

5. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$ différent de ℓ, on a la relation

$$g(x) = \tfrac{1}{2}g(x + 1) + \tfrac{1}{2}g(1) + 1$$

et en déduire la valeur de $g(1)$ (il sera peut-être nécessaire pour cela de calculer $g(x)$ pour tout $x \in \{1, \dots, \ell\}$).

6. D'après ce qui précède, mais sans chercher une justification rigoureuse, quel semble être l'ordre de grandeur, lorsque l'on tire un grand nombre n de fois à pile ou face, de la taille de la plus longue série consécutive de résultats identiques ?

——— Fin du sujet ———