Sorbonne Université — 2021 – 2022
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 4 janvier 2022

Examen

L'épreuve dure trois heures.
Les cinq exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 points.

Exercice 1

Barème indicatif : 10 points (2+3+5).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées, indépendantes et de même loi, dont on notera m l'espérance. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

1. Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.

2. Rappeler la démonstration du fait que si $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$, alors $\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] \geqslant 0) = 1$.

3. Exprimer en fonction de X, Y et m quatre des espérances conditionnelles suivantes (vous n'avez pas d'assez d'informations pour calculer l'une d'entre elles) :

a. $\mathbb{E}[XY|\{\varnothing, \Omega\}]$
b. $\mathbb{E}[XY|X]$
c. $\mathbb{E}[X|XY]$
d. $\mathbb{E}[X - Y|X]$
e. $\mathbb{E}[X - Y|XY]$

Exercice 2

Barème indicatif : 10 points.

Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, on définit l'intervalle

$$A_{n,k} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$$

et le réel

$$m_{n,k} = 2^n \int_{A_{n,k}} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on définit la fonction $f_n : [0, 1[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_{n,k}\, \mathbf{1}_{A_{n,k}}\ .$$

Déterminer si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f, et en quel(s) sens.

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (2+2+3+2+3+3).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Enfin, on pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Trouver une fonction simple $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $(S_n^2 - f(n))_{n\geqslant 0}$ soit une martingale.

3. Déterminer la relation qui doit exister entre deux réels α et β pour que $(e^{\alpha S_n - \beta n})_{n\geqslant 0}$ soit une martingale.

Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on définit le temps d'arrêt $T_a = \inf\{n \geqslant 0 : S_n = a\}$.

4. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.

5. Calculer, pour tout entier $a \geqslant 1$ et tout réel $\beta \geqslant 0$, l'espérance $\mathbb{E}[e^{-\beta T_a}]$.

6. Voyez-vous une relation entre les lois de T_1 et T_2 ? Auriez-vous pu la prévoir ?

Exercice 4

Barème indicatif : 15 points (2+3+2+3+3+2).

Soit E un espace d'états et P un noyau de transition markovien sur E. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\geqslant 0})$ de noyau de transition P. On suppose la chaîne irréductible et récurrente positive. Elle admet donc une unique mesure de probabilité invariante, que l'on note π.

Pour tous $x, y \in E$, on note $T_y = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = y\}$ et $t_{xy} = \mathbb{E}_x[T_y]$.

1. Rappeler ce que vaut t_{xx}.

2. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a

$$t_{xy} = 1 + \sum_{z\neq y} P(x, z) t_{zy}.$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tous $x_0, \ldots, x_n \in E$ deux à deux distincts, on a

$$t_{x_0 x_n} \geqslant P(x_0, x_1) \ldots P(x_{n-2}, x_{n-1}) t_{x_{n-1} x_n}.$$

4. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a $t_{xy} < \infty$.

On note, pour tout $x \in E$,

$$k_x = \sum_{y\neq x} \pi(y) t_{xy}.$$

5. Soit $x \in E$. Montrer que

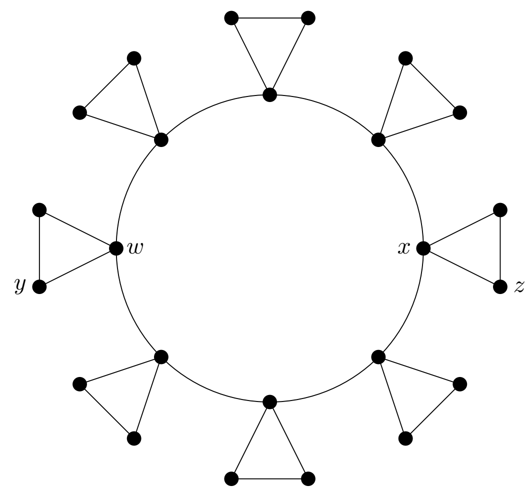
$$k_x = \sum_{y\in E} P(x, y) k_y.$$

6. On suppose que E est un ensemble fini. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a $k_x = k_y$. (Indication : on pourra considérer $x \in E$ tel que $k_x = \min\{k_z : z \in E\}$.)

Exercice 5

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On considère une marche au hasard sur le graphe représenté ci-dessous :



1. Déterminer toutes les probabilités invariantes pour cette marche au hasard.

2. Partant du sommet x, combien de temps met en moyenne la marche à y revenir ?

3. Entre deux visites en x, combien de fois la marche visite-t-elle en moyenne y ? Et combien de fois z ?

4. On fait partir la marche du sommet x et on la laisse évoluer pendant un temps long. Quelle est, asymptotiquement, la proportion du temps que la marche passe dans l'ensemble de huit sommets situés sur le cercle intérieur du graphe ?

5. On fait partir du sommet x un très grand nombre de marcheurs qui évoluent indépendamment les uns des autres. Au bout d'un temps long, la proportion de ces marcheurs qui se trouvent sur le sommet w admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

—————— Fin du sujet ——————

Solution de l'exercice 1

Les deux premières questions sont des questions de cours.

1. La variable aléatoire X est bornée, donc elle est intégrable, donc elle admet une espérance conditionnelle, qui est une variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable Z telle que pour tout événement $B \in \mathscr{G}$, on ait

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_B].$$

Deux espérances conditionnelles de X sachant $\mathscr{G}$ sont égales $\mathbb{P}$-presque sûrement.

2. Notons $Z = \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, considérons l'événement

$$B_n = \Big\{Z \leqslant -\frac{1}{n}\Big\}.$$

Cet événement appartient à $\mathscr{G}$, car Z est $\mathscr{G}$-mesurable. De plus, la variable aléatoire $X\mathbf{1}_{B_n}$ est positive. On a donc

$$0 \leqslant \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_n}] = \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{B_n}] \leqslant -\frac{1}{n}\mathbb{P}(B_n).$$

On en déduit que $\mathbb{P}(B_n) \geqslant 0$, si bien que $\mathbb{P}(B_n) = 0$.

En utilisant la sous-additivité de $\mathbb{P}$ (c'est-à-dire le fait que la probabilité d'une réunion dénombrable d'événements est plus petite que la somme des probabilités de ces événements) ou le fait que la suite d'événements $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et le théorème de convergence monotone pour les mesures (c'est-à-dire le fait que la probabilité de l'union d'une suite croissante d'événements est la limite des probabilités de ces événements), on trouve

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\Big) = 0.$$

Or la réunion de la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est

$$\bigcup_{n\geqslant 0} B_n = \{Z < 0\}.$$

En passant au complémentaire, on en déduit que $\mathbb{P}(Z \geqslant 0) = 1$.

3. a. L'espérance conditionnelle sachant la tribu $\{\varnothing, \Omega\}$ est constante, presque sûrement égale à l'espérance. Ainsi,

$$\mathbb{E}[XY|\{\varnothing, \Omega\}] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = m^2.$$

b. En utilisant la possibilité de sortir de l'espérance conditionnelle un facteur mesurable par rapport à la tribu sachant la quelle on conditionne, puis l'indépendance de X et Y, on trouve

$$\mathbb{E}[XY|X] = X\mathbb{E}[Y|X] = X\mathbb{E}[Y] = mX.$$

c. Aucune propriété générale de l'espérance conditionnelle ne semble permettre de calculer celle-ci.

d. En utilisant la linéarité de l'espérance conditionnelle, et l'indépendance de X et de Y, on trouve

$$\mathbb{E}[X - Y|X] = \mathbb{E}[X|X] - \mathbb{E}[Y|X] = X - \mathbb{E}[Y] = X - m.$$

e. On ne sait pas calculer $\mathbb{E}[X|XY]$, mais on sait que c'est une variable aléatoire de la forme $f(XY)$ pour une certaine fonction borélienne f. Et on sait que si un vecteur aléatoire (U, V) a même loi que (X, XY), alors $\mathbb{E}[U|V] = f(V)$, avec la même fonction f. Or le vecteur aléatoire (Y, XY) a même loi que le vecteur (X, XY). En effet, puisque X et Y sont indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires (X, Y) et (Y, X) ont la même loi ; et les vecteurs aléatoires (X, XY) et (Y, XY) sont respectivement les images des vecteurs aléatoires (X, Y) et (Y, X) par la même fonction $(a, b) \mapsto (a, ab)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, $\mathbb{E}[Y|XY] = f(XY)$. Finalement,

$$\mathbb{E}[X - Y|XY] = \mathbb{E}[X|XY] - \mathbb{E}[Y|XY] = f(XY) - f(XY) = 0.$$

J'ai lu dans beaucoup de copies que $\mathbb{E}[X - Y|XY] = 0$ "parce que X et Y ont la même loi". C'est une justification insuffisante, comme le montre l'exemple qui suit. Considérons X et Y deux variables aléatoires telles que

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 0) = \frac{1}{4}.$$

Alors X et Y ont même loi, uniforme sur $\{0, 1, 2, 3\}$. La variable aléatoire XY prend les valeurs 0, 3 et 4, avec les probabilités respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$. Enfin,

$$\mathbb{E}[X|XY] = \tfrac{3}{2}\,\mathbf{1}_{\{XY=0\}} + \mathbf{1}_{\{XY=3\}} + 2\,\mathbf{1}_{\{XY=4\}}$$

et

$$\mathbb{E}[Y|XY] = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{1}_{\{XY=0\}} + 3\,\mathbf{1}_{\{XY=3\}} + 2\,\mathbf{1}_{\{XY=4\}},$$

qui ne sont pas égales.

Solution de l'exercice 2

Pour chaque $n \geqslant 0$, les intervalles $A_{n,k}$, où k varie entre 0 et $2^n - 1$, forment une partition de l'intervalle $[0, 1[$. Notons $\mathscr{F}_n$ la tribu sur $[0, 1[$ engendrée par cette partition. La suite $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ est une filtration sur $[0, 1[$.

On sait (il n'était pas demandé de le redémontrer) que

$$\mathscr{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n\geqslant 0} \mathscr{F}_n\Big)$$

est la tribu borélienne de $[0, 1[$, que nous noterons $\mathscr{B}$.

Par définition, la fonction f_n est la fonction constante sur chaque bloc de la partition qui engendre $\mathscr{F}_n$, égale sur le bloc $A_{n,k}$ à $m_{n,k}$, qui est la valeur moyenne de f sur ce bloc pour la mesure de Lebesgue. Cette moyenne existe, au passage, parce que f est bornée, donc intégrable sur $[0,1[$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Ainsi, si nous travaillons sur l'espace de probabilité filtré $([0,1[,\mathscr{B},(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0},\mathrm{Leb})$, nous pouvons écrire que pour tout $n\geqslant 0$,

$$f_n=\mathbb{E}[f|\mathscr{F}_n].$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale. C'est une martingale fermée, donc bornée dans L^1. On peut dire bien mieux : soit $M\geqslant 0$ un réel tel que $|f|\leqslant M$, alors pour tout $n\geqslant 0$,

$$|f_n|=\big|\mathbb{E}[f|\mathscr{F}_n]\big|\leqslant \mathbb{E}\big[|f|\big|\mathscr{F}_n\big]\leqslant \mathbb{E}[M|\mathscr{F}_n]=M.$$

Ainsi, pour tout $p\geqslant 1$ et tout $n\geqslant 1$, on a

$$\mathbb{E}[|f_n|^p]^{\frac{1}{p}}\leqslant M,$$

c'est-à-dire que la martingale $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^p, par M.

Puisque la martingale $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^1, elle converge presque sûrement, vers une certaine limite que nous notons provisoirement g.

Puisque c'est une martingale fermée (ou puisqu'elle est bornée dans L^2), elle est uniformément intégrable, et elle converge donc dans L^1 vers g.

D'après un théorème concernant les martingales fermées, on sait que sa limite est l'espérance conditionnelle de f sachant $\mathscr{F}_\infty$, si bien que

$$g=\mathbb{E}[f|\mathscr{F}_\infty]=\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]=f.$$

Enfin, pour tout $p\geqslant 1$, puisque la martingale est bornée dans L^p, elle converge vers $g=f$ dans L^p.

Finalement,

$$f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} f\quad\text{et pour tout } p\geqslant 1,\ \int_0^1\big|f_n(t)-f(t)\big|^p\,\mathrm{d}t\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Puisque la martingale est bornée dans L^∞, on pourrait se demander s'il y a convergence dans L^∞ de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f. Montrons par un exemple que ce n'est pas toujours le cas.

Considérons

$$f=\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{3}]}.$$

Comme $\frac{1}{3}$ n'est pas un réel dyadique, pour tout $n\geqslant 0$, il existe $k\in\{0,\dots,2^n-2\}$ tel que

$$k2^{-n}<\frac{1}{3}<(k+1)2^{-n}.$$

Sur l'intervalle $A_{n,k}$, la fonction f_n est constante, égale à $m_{n,k}$, et la fonction f prend les valeurs 0 et 1 sur des ensembles de mesure de Lebesgue positive. Ainsi,

$$\|f_n - f\|_\infty \geqslant \max(m_{n,k}, 1 - m_{n,k}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge donc pas vers f dans L^∞.

Solution de l'exercice 3

1. La variable aléatoire S_0 est constante, donc mesurable par rapport à $\mathscr{F}_0$. Pour tout $n \geqslant 1$, la variable aléatoire S_n est une fonction de $\xi_1, \ldots, \xi_n$, donc mesurable par rapport à $\mathscr{F}_n$. Le processus $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est donc adapté à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a $|S_n| \leqslant |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| = n$, donc S_n est intégrable.

Enfin, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + \xi_{n+1}|\mathscr{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = S_n,$$

où nous avons utilisé le fait que ξ_{n+1} est indépendante de $\mathscr{F}_n$.

Ces trois propriétés constituent la définition du fait que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Puisque S_n est bornée pour tout $n \geqslant 0$, elle est de carré intégrable. Calculons, pour $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[(S_n + \xi_{n+1})^2|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[S_n^2 + 2S_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2|\mathscr{F}_n].$$

En utilisant encore l'indépendance de ξ_{n+1} par rapport à $\mathscr{F}_n$, et le fait que $\xi_{n+1}^2 = 1$, on trouve

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathscr{F}_n] = S_n^2 + S_n\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n] + 1 = S_n^2 + 1.$$

En retirant $n+1$ à chaque membre de l'égalité, on trouve

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathscr{F}_n] = S_n^2 - n.$$

Autrement dit, la suite $(S_n^2 - n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

3. Donnons-nous un réel α un entier $n \geqslant 1$, et calculons $\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathscr{F}_n]$. Nous trouvons, en utilisant l'indépendance de ξ_{n+1}, et donc de $e^{\alpha\xi_{n+1}}$ par rapport à $\mathscr{F}_n$,

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[e^{\alpha S_n}e^{\alpha\xi_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n}\mathbb{E}[e^{\alpha\xi_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n}\mathbb{E}[e^{\alpha\xi_{n+1}}] = e^{\alpha S_n}\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}.$$

On reconnaît le cosinus hyperbolique de α, c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n}\operatorname{ch}\alpha.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $(\operatorname{ch}\alpha)^{n+1}$, on trouve

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}}(\operatorname{ch}\alpha)^{-(n+1)}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n}(\operatorname{ch}\alpha)^{-n}.$$

Le nombre $\operatorname{ch}\alpha$ est strictement positif : notons β son logarithme, de sorte que $e^\beta = \operatorname{ch}\alpha$. Alors la relation précédente s'écrit

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{n+1}-(n+1)\beta}|\mathscr{F}_n] = e^{\alpha S_n - n\beta}.$$

Ainsi, pourvu que la relation $\beta = \ln\operatorname{ch}\alpha$ ait lieu, la suite $(e^{\alpha S_n - \beta n})_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

4. La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$, de noyau de transition $P(i,j) = \frac{1}{2}$ si $|i-j| = 1$, et $P(i,j) = 0$ sinon. On sait que cette chaîne est irréductible et récurrente. En particulier, partant de n'importe quel point, en particulier partant de 0, elle visite tous les entiers, en particulier l'entier a. Ainsi, T_a est fini presque sûrement.

On pouvait aussi dire, je l'ai lu dans plusieurs copies, que $(S_{T_a\wedge n})_{n\geqslant 0}$ est une martingale bornée supérieurement (si $a > 0$) ou inférieurement (si $a < 0$), qu'elle converge donc presque sûrement ; et qu'elle converge par ailleurs exactement sur l'événement $\{T_a < \infty\}$.

5. Soit $a \in \mathbb{Z}$ un entier. Soit $\beta \geqslant 0$ un réel. Le réel e^β est supérieur ou égal à 1, il existe donc un réel α tel que $e^\beta = \operatorname{ch}\alpha$. Si $\beta > 0$, il en existe exactement deux, opposés l'un de l'autre : choisissons celui qui est positif.

Pour tout entier $k \geqslant 0$, appliquons le théorème d'arrêt à la martingale $(e^{\alpha S_n - \beta n})_{n\geqslant 0}$ et au temps d'arrêt $\min(T_a, k)$. On trouve

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{T_a\wedge k} - \beta(T_a\wedge k)}] = \mathbb{E}[e^{\alpha S_0 - \beta 0}] = 1.$$

Puisque T_a est fini presque sûrement, lorsque k tend vers l'infini, $e^{\alpha S_{T_a\wedge k} - \beta(T_a\wedge k)}$ tend presque sûrement vers $e^{\alpha S_{T_a} - \beta T_a}$.

Puisque $a \geqslant 1$, on a $S_{T_a\wedge k} \leqslant a$ pour tout $k \geqslant 0$. Comme $\alpha \geqslant 0$, on a pour tout $k \geqslant 0$

$$e^{\alpha S_{T_a\wedge k} - \beta(T_a\wedge k)} \leqslant e^{\alpha a}.$$

La convergence presque sûre est donc dominée, et on peut passer à la limite dans l'espérance, pour trouver

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_{T_a} - \beta T_a}] = 1.$$

Or $S_{T_a} = a$, donc

$$\mathbb{E}[e^{-\beta T_a}] = e^{a\alpha} = e^{a \operatorname{argch}(e^\beta)}.$$

6. Notons $s = e^{-\beta}$, qui varie dans $[0,1]$ lorsque β varie dans $\mathbb{R}^+$. On a montré à la question précédente que pour tout $s \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}[s^{T_a}] = e^{a \operatorname{argch}(1/s)}.$$

Nous avons donc déterminé la fonction génératrice de T_a, qui caractérise sa loi.

Nous observons que

$$\mathbb{E}[s^{T_2}] = e^{2\operatorname{argch}(1/s)} = \mathbb{E}[s^{T_1}]^2.$$

Ainsi, T_2 a même loi que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de même loi que T_1.

En regardant la marche aléatoire comme une chaîne de Markov, ceci peut se démontrer en écrivant

$$T_2 = T_1 + \widehat{T}_1(\theta_{T_1}(X))$$

et en appliquant la propriété de Markov forte au temps T_1, ou le résultat qui affirme que puisque $S_{T_1} = 1$, la trajectoire $\theta_{T_1}(X)$ est indépendante de $\mathscr{F}_{T_1}$ sous $\mathbb{P}_0$, et de loi $\widehat{\mathbb{P}}_1$.

Solution de l'exercice 4

1. On sait que

$$t_{xx} = \mathbb{E}_x[T_x] = \frac{1}{\pi(x)}.$$

2. Soient $x, y \in E$. On a

$$T_y = \mathbf{1}_{\{X_1=y\}} + \sum_{z\neq y} \mathbf{1}_{\{X_1=z\}}(1 + \widehat{T}_y(\theta_1(X))) = 1 + \sum_{z\neq y} \mathbf{1}_{\{X_1=z\}}\widehat{T}_y(\theta_1(X)).$$

En appliquant la propriété de Markov au temps 1, on trouve, pour tout $z \neq y$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_1=z\}}\widehat{T}_y(\theta_1(X))] &= \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_1=z\}}\widehat{T}_y(\theta_1(X))|\mathscr{F}_1]\big] \\
&= \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_{\{X_1=z\}}\mathbb{E}_x[\widehat{T}_y(\theta_1(X))|\mathscr{F}_1]\big] \\
&= \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_{\{X_1=z\}}\mathbb{E}_{X_1}[\widehat{T}_y(X)]\big] \\
&= \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_{\{X_1=z\}}\mathbb{E}_{X_1}[T_y]\big] \\
&= \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_{\{X_1=z\}}\mathbb{E}_z[T_y]\big] \\
&= P(x,y)t_{zy}.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans notre première ligne de calcul, on trouve l'inégalité cherchée.

Beaucoup de copies contenaient l'affirmation "$T_y = 1 + T_y \circ \theta_1$", qui est malheureusement fausse. Par exemple, si x, y, z sont deux à deux distncts, alors sur l'événement $\{X_0 = x, X_1 = y, X_2 = z, X_3 = y\}$, on a $T_y = 1$ et $1 + T_y \circ \theta_1 = 3$. En fait, le seul temps d'arrêt qui vérifie l'égalité $T = 1 + T \circ \theta_1$ est le temps d'arrêt identiquement égal à $+\infty$.

3. Faisons la démonstration par récurrence sur n. Pour $n = 2$, on a x_0, x_1, x_2 avec $x_1 \neq x_2$. D'après la question précédente,

$$t_{x_0x_2} = 1 + \sum_{z\neq x_2} P(x_0, z)t_{zx_2} \geqslant P(x_0, x_1)t_{x_1x_2}.$$

Supposons la propriété montrée pour un entier n et donnons-nous $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$ avec $x_1, \ldots, x_{n+1}$ deux à deux distincts. Alors l'hypothèse de récurrence au rang n appliquée à $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n+1}$ nous donne

$$t_{x_0x_{n+1}} \geqslant P(x_0, x_1)\ldots P(x_{n-2}, x_{n-1})t_{x_{n-1}x_{n+1}}.$$

L'hypothèse de récurrence au rang 2 appliquée à x_{n-1}, x_n, x_{n+1} donne

$$t_{x_{n-1}x_{n+1}} \geqslant P(x_{n-1}, x_n)t_{x_n x_{n+1}}.$$

En mettant les deux inégalités ensemble, on a le résultat.

4. Considérons x, y dans E. Si $x = y$, on sait déjà que $t_{xy} = t_{xx} < \infty$. Supposons $x \neq y$. Puisque la chaîne est irréductible, il existe $n \geqslant 0$ tel que $P^n(x, y) > 0$. Il existe donc $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ tels que $P(x_i, x_{i+1}) > 0$ pour tout i entre 0 et $n-1$. En prenant n minimal, on peut s'assurer que $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts. Alors

$$\infty > t_{xx} \geqslant P(x_0, x_1) \ldots P(x_{n-1}, x_n)t_{yx},$$

si bien que $t_{yx} < \infty$. Quitte à échanger les rôles de x et de y, c'est le résultat cherché.

Le résultat de cette question n'est pas un résultat du cours. Un résultat du cours affirme que dans la situation étudiée, T_y est fini $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, mais c'est une affirmation plus faible que le fait que l'espérance de T_y sous $\mathbb{P}_x$ est finie.

5. En appliquant les résultats des deux premières questions, on trouve

$$\begin{aligned}
k_x &= \sum_{y \neq x} \pi(y)t_{xy} \\
&= -1 + \sum_{y \in E} \pi(y)t_{xy} \\
&= -1 + \sum_{y \in E} \pi(y)\Big(1 + \sum_{z \neq y} P(x, z)t_{zy}\Big) \\
&= \sum_{y \in E} \pi(y)\Big(\sum_{z \in E} P(x, z)t_{zy} - P(x, y)t_{yy}\Big) \\
&= -1 + \sum_{y,z \in E} \pi(y)P(x, z)t_{zy} \\
&= -1 + \sum_{z \in E} P(x, z)(k_z + 1) \\
&= \sum_{z \in E} P(x, z)k_z.
\end{aligned}$$

6. Soit x tel que k_x soit minimal. En soustrayant k_x à l'égalité obtenue à la question précédente, on trouve

$$0 = k_x - k_x = \sum_{y \in E} P(x, y)(k_y - k_x).$$

La somme du membre de droite est une somme de termes positifs, et elle est nulle : tous ses termes sont nuls. On en déduit que $k_y = k_x$ dès que $P(x, y) > 0$.

En procédant par récurrence, on vérifie que pour tout $n \geqslant 1$,

$$k_x = \sum_{z \in E} P^n(x, z) k_z.$$

Le même raisonnement montre alors que $k_z = k_x$ dès qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $P^n(x, z) > 0$. Puisque la chaîne est irréductible, un tel n existe pour tout z, et on a bien montré que $k_z = k_x$ pour tout $z \in E$.

Solution de l'exercice 5

1. La marche au hasard sur ce graphe est une chaîne de Markov sur l'ensemble des sommets du graphe. Comme le graphe est connexe, la marche est irréductible, et comme il est fini, elle est irréductible récurrente positive.

On sait que la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est une mesure réversible, donc invariante. Puisque la chaîne est irréductible, on sait que c'est son unique probabilité invariante.

Il y a deux sortes de sommets dans ce graphe : les huits sommets intérieurs qui sont sur le cercle, comme x et w, et les seize sommets extérieurs, comme z et y. Les sommets intérieurs sont de degré 4, et les sommets extérieurs de degré 2.

En normalisant la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins, on voit que la probabilité invariante donne une masse $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$ aux sommets intérieurs et une masse $\frac{2}{64} = \frac{1}{32}$ aux sommets extérieurs.

Dans la réponse à cette première question de cet exercice hyper-standardisé (puisqu'il est dans tous les sujets d'examen de ce cours, avec un graphe différent, mais avec les mêmes questions), je n'ai pas mis tous les points si les masses $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{32}$ n'apparaissaient pas explicitement, ou au moins le nombre 64.

Et je sais que l'erreur est humaine, mais il est toujours décevant de voir que certains se trompent en comptant le nombre de voisins de certains sommets.

2. Partant de x, la marche met en moyenne un temps

$$\mathbb{E}_x[T_x] = \frac{1}{\pi(x)} = 16$$

à revenir en x.

3. Le nombre moyen de visites en un somment entre deux visites en x est l'unique mesure invariante qui associe à x la masse 1. C'est donc $\frac{\pi}{\pi(x)}$.

Entre deux visites en x, le nombre moyen de visites en y est donc de

$$\frac{\pi(y)}{\pi(x)} = \frac{1}{2}.$$

4. La théorème ergodique permet d'affirmer que la proportion du temps que passe la chaîne sur l'ensemble des sommets intérieurs est la masse donnée par la probabilité invariante à cet ensemble de sommets, c'est-à-dire $8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$.

5. On a $P^2(x,x) > 0$ et $P^3(x,x) > 0$, et 2 et 3 sont premiers entre eux, donc la chaîne est apériodique. Le théorème de convergence vers la mesure invariante assure donc que la distribution de la chaîne converge vers sa probabilité invariante. En particulier, la proportion des marcheurs qui se trouvent en w tend vers $\pi(w) = \frac{1}{16}$.