Sorbonne Université — 2021 – 2022
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 4 janvier 2022

Examen

L'épreuve dure trois heures.
Les cinq exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Le barème est indicatif. La note finale sera sur 50 *points.*

Exercice 1

Barème indicatif : 10 points (2+3+5).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées, indépendantes et de même loi, dont on notera m l'espérance. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

1. Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.

2. Rappeler la démonstration du fait que si $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$, alors $\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] \geqslant 0) = 1$.

3. Exprimer en fonction de X, Y et m quatre des espérances conditionnelles suivantes (vous n'avez pas d'assez d'informations pour calculer l'une d'entre elles) :

a. $\mathbb{E}[XY|\{\varnothing, \Omega\}]$
b. $\mathbb{E}[XY|X]$
c. $\mathbb{E}[X|XY]$
d. $\mathbb{E}[X - Y|X]$
e. $\mathbb{E}[X - Y|XY]$

Exercice 2

Barème indicatif : 10 points.

Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, on définit l'intervalle

$$A_{n,k} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$$

et le réel

$$m_{n,k} = 2^n \int_{A_{n,k}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on définit la fonction $f_n : [0, 1[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_{n,k}\,\mathbf{1}_{A_{n,k}}\ .$$

Déterminer si la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers f, et en quel(s) sens.

Exercice 3

Barème indicatif : 15 points (2+2+3+2+3+3).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on se donne une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Enfin, on pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

1. Montrer que $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$.
2. Trouver une fonction simple $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $(S_n^2 - f(n))_{n \geqslant 0}$ soit une martingale.
3. Déterminer la relation qui doit exister entre deux réels α et β pour que $(e^{\alpha S_n - \beta n})_{n \geqslant 0}$ soit une martingale.

Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on définit le temps d'arrêt $T_a = \inf\{n \geqslant 0 : S_n = a\}$.

4. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.
5. Calculer, pour tout entier $a \geqslant 1$ et tout réel $\beta \geqslant 0$, l'espérance $\mathbb{E}[e^{-\beta T_a}]$.
6. Voyez-vous une relation entre les lois de T_1 et T_2 ? Auriez-vous pu la prévoir ?

Exercice 4

Barème indicatif : 15 points (2+3+2+3+3+2).

Soit E un espace d'états et P un noyau de transition markovien sur E. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E}, (X_n)_{n \geqslant 0})$ de noyau de transition P. On suppose la chaîne irréductible et récurrente positive. Elle admet donc une unique mesure de probabilité invariante, que l'on note π.

Pour tous $x, y \in E$, on note $T_y = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = y\}$ et $t_{xy} = \mathbb{E}_x[T_y]$.

1. Rappeler ce que vaut t_{xx}.
2. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a

$$t_{xy} = 1 + \sum_{z \neq y} P(x, z) t_{zy}.$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tous $x_0, \ldots, x_n \in E$ deux à deux distincts, on a

$$t_{x_0 x_n} \geqslant P(x_0, x_1) \ldots P(x_{n-2}, x_{n-1}) t_{x_{n-1} x_n}.$$

4. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a $t_{xy} < \infty$.

On note, pour tout $x \in E$,

$$k_x = \sum_{y \neq x} \pi(y) t_{xy}.$$

5. Soit $x \in E$. Montrer que

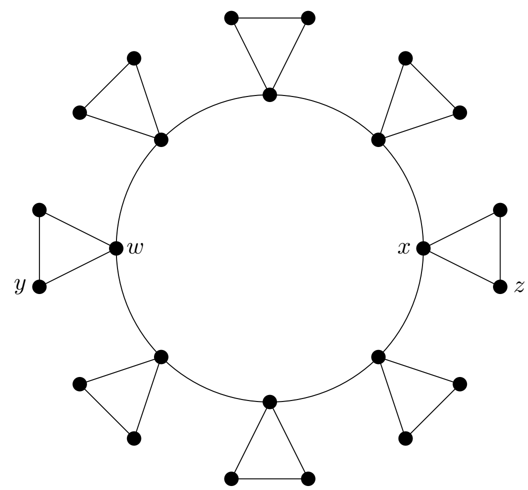
$$k_x = \sum_{y \in E} P(x, y) k_y.$$

6. On suppose que E est un ensemble fini. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a $k_x = k_y$. (Indication : on pourra considérer $x \in E$ tel que $k_x = \min\{k_z : z \in E\}$.)

Exercice 5

Barème indicatif : 10 points (2+2+2+2+2).

On considère une marche au hasard sur le graphe représenté ci-dessous :



1. Déterminer toutes les probabilités invariantes pour cette marche au hasard.

2. Partant du sommet x, combien de temps met en moyenne la marche à y revenir ?

3. Entre deux visites en x, combien de fois la marche visite-t-elle en moyenne y ? Et combien de fois z ?

4. On fait partir la marche du sommet x et on la laisse évoluer pendant un temps long. Quelle est, asymptotiquement, la proportion du temps que la marche passe dans l'ensemble de huit sommets situés sur le cercle intérieur du graphe ?

5. On fait partir du sommet x un très grand nombre de marcheurs qui évoluent indépendamment les uns des autres. Au bout d'un temps long, la proportion de ces marcheurs qui se trouvent sur le sommet w admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

FIN DU SUJET