Examen – Deuxième session

L'épreuve dure deux heures. Les trois exercices sont indépendants.
La consultation des notes de cours et du polycopié est autorisée.

Exercice 1

On se place sur l'espace de Banach $\mathcal{C}([0,1])$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne. On munit l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{C}[0,1])$ des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathcal{C}([0,1])$ de la topologie de la convergence faible.

Pour tout réel $\theta > 0$, on admettra l'existence et l'unicité d'un élément $\mathbb{P}_\theta$ de $\mathcal{M}(\mathcal{C}([0,1]))$ tel que sous $\mathbb{P}_\theta$, le processus canonique $(W_t)_{t\in[0,1]}$ soit gaussien et centré, de covariance donnée par la formule suivante :

$$\forall s,t \in [0,1], \quad \mathbb{E}_\theta[W_s W_t] = \frac{1}{2\theta}\big(e^{-\theta|t-s|} - e^{-\theta(t+s)}\big).$$

Un processus de loi $\mathbb{P}_\theta$ s'appelle un processus d'Ornstein–Uhlenbeck de paramètre θ.

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire gaussienne centrée, alors $\mathbb{E}[Z^4] = 3\mathbb{E}[Z^2]^2$.

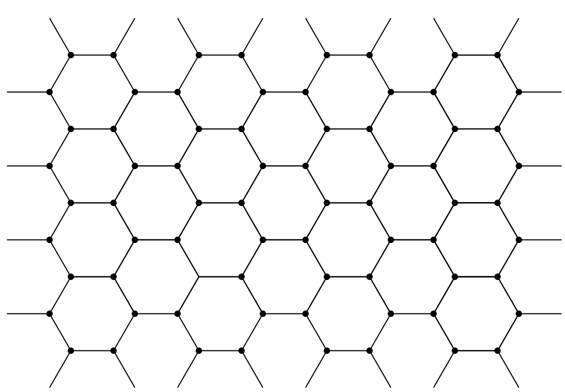
2. Montrer que l'application $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{C}([0,1]))$ est continue.

3. Soit $\theta > 0$ et soit $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus de loi $\mathbb{P}_\theta$. Montrer que pour tout réel $\alpha < \frac{1}{4}$, les trajectoires de X sont presque sûrement höldériennes d'exposant α. Peut-on dire mieux ?

4. La limite $\lim_{\theta\to 0} \mathbb{P}_\theta$ existe-t-elle ? Et la limite $\lim_{\theta\to\infty} \mathbb{P}_\theta$?

Exercice 2

On considère la percolation par arêtes sur le réseau hexagonal dont une partie est représentée ci-dessous :



1. Montrer que la probabilité $\mathbb{P}_p(v \longleftrightarrow \infty)$ est la même pour tout sommet v dans ce graphe.

On choisit un sommet o qu'on appelle l'origine et on définit successivement

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow \infty) \quad \text{et} \quad p_c = \sup\{p \in [0,1] : \theta(p) = 0\}.$$

2. Montrer que $\theta(p)$ est nul pour $p < p_c$ et strictement positif pour $p > p_c$.

3. Déterminer deux réels a et b tels que $0 < a \leqslant p_c \leqslant b < 1$.

4. Pensez-vous qu'il soit possible d'adapter au cas de ce réseau hexagonal la preuve donnée en cours du fait que pour la percolation sur-critique sur le réseau carré, il y a un unique agrégat infini ?

Exercice 3

Soit (E,d) un espace métrique. Soit $I : E \to [0,+\infty]$ une bonne fonction de taux, c'est-à-dire une fonction telle que pour tout réel α, la partie $\{x \in E : I(x) \leqslant \alpha\}$ de E soit compacte. Soit $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de mesures de probabilité boréliennes sur E qui satisfait un principe de grandes déviations de vitesse n et de fonction de taux I. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

Pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, on note respectivement $B(x,r)$ et $\overline{B}(x,r)$ les boules ouverte et fermée de centre x et de rayon r. On note par ailleurs $\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$.

1. Soient $x \in E$ et $\delta > 0$. En considérant la partie $G = \{y \in E : f(y) > f(x) - \delta\}$, montrer que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_E e^{nf(x)} \, \mathrm{d}\mu_n(x) \geqslant f(x) - I(x) - \delta.$$

2. Soient $\alpha \geqslant 0$ et $\delta > 0$ des réels. Notons $K = \{x \in E : I(x) \leqslant \alpha\}$. Montrer qu'il existe un entier $N \geqslant 1$, des points $x_1, \dots, x_N$ de K et un réel $r > 0$ tels que

1. $\forall i \in \{1,\dots,N\},\ \forall y \in \overline{B}(x_i,r), \quad I(y) > I(x_i) - \delta \ \text{ et } \ f(y) < f(x_i) + \delta.$
2. $K \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i,r).$

3. En déduire que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_E e^{nf(x)} \mathrm{d}\mu_n(x) \leqslant \max\Big(\max_{i=1\dots N} \big(f(x_i) - I(x_i) + 2\delta\big), \|f\|_\infty - \alpha \Big).$$

4. Montrer que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathbb{R}} e^{nf(x)} \, \mathrm{d}\mu_n(x)$$

existe et en donner une expression simple.

—— Fin du sujet ——