Examen

L'épreuve dure deux heures.
Les trois exercices sont indépendants.
Les énoncés sont longs mais contiennent des rappels.
La consultation des notes de cours et du polycopié est autorisée.

Exercice 1

On se place sur l'espace de Banach $\mathcal{C}([0,1])$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne. On munit l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{C}[0,1])$ des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathcal{C}([0,1])$ de la topologie de la convergence faible.

Pour tout réel $H \in]0,1[$, on admettra l'existence et l'unicité d'un élément $\mathbb{P}_H$ de $\mathcal{M}(\mathcal{C}([0,1]))$ tel que sous $\mathbb{P}_H$, le processus canonique $(W_t)_{t\in[0,1]}$ soit gaussien et centré, de covariance donnée par la formule suivante :

$$\forall s,t \in [0,1], \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}_H}[W_s W_t] = \tfrac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

On peut noter que pour $H = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}_H$ est la mesure de Wiener. Un processus de loi $\mathbb{P}_H$ s'appelle un mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hurst H.

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire gaussienne centrée, alors $\mathbb{E}[Z^4] = 3\mathbb{E}[Z^2]^2$.
2. Montrer que l'application $H \mapsto \mathbb{P}_H$ de $]0,1[$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{C}([0,1]))$ est continue.
3. Soit $H \in]0,1[$ et soit $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus de loi $\mathbb{P}_H$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,H[$, les trajectoires de X sont presque sûrement Höldériennes d'exposant α.

Question subsidiaire

Proposer pour ce cours un meilleur nom que “Théorèmes limites en probabilités”.

Exercice 2

Soit $N \geqslant 2$ un entier. Soit $\Delta = \{(q_1, \dots, q_N) \in [0,1]^N : q_1 + \cdots + q_N = 1\}$. Soient $a_1 < \ldots < a_N$ des réels et $(p_1, \dots, p_N)$ un élément de Δ dont toutes les composantes sont strictement positives. On note $\mu = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{a_i}$. On se donne, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi μ.

Le but de cet exercice est de démontrer, bien entendu *sans l'utiliser*, le théorème de Cramér pour la suite des moyennes empiriques de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] \quad \text{et} \quad \Lambda^*(x) = \sup\{\lambda x - \Lambda(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

a. Montrer que Λ' est une bijection continue croissante de $\mathbb{R}$ dans un intervalle ouvert borné $J =]a, b[$ que l'on déterminera.

b. Soit y un élément de J. Soit η l'unique réel tel que $\Lambda'(\eta) = y$. Montrer que

$$\eta y - \Lambda(\eta) = \Lambda^*(y).$$

c. Calculer $\Lambda^*(a)$ et $\Lambda^*(b)$, puis la fonction Λ^* sur $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$.

2. On définit les fonctions $m : \Delta \to \mathbb{R}$ et $H : \Delta \to \mathbb{R}$ en posant

$$m(q_1, \dots, q_N) = q_1 a_1 + \ldots + q_N a_N \quad \text{et} \quad H(q_1, \dots, q_N) = \sum_{i=1}^N q_i \log \frac{q_i}{p_i}.$$

On note $T = \{(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N : t_1 + \cdots + t_N = t_1 a_1 + \cdots + t_N a_N = 0\}$ et, pour tout x réel, $\Delta_x = \{(q_1, \dots, q_N) \in \Delta : m(q_1, \dots, q_N) = x\}$.

a. Soit x un élément de J. Montrer que la fonction H est strictement convexe sur Δ et qu'elle admet un unique minimum sur Δ_x.

b. Soit $(r_1, \dots, r_N)$ l'élément de Δ_x où la fonction H atteint son minimum. On *admettra* que toutes les composantes de $(r_1, \dots, r_N)$ sont strictement positives. Calculer, pour tout $(t_1, \dots, t_N) \in T$, la dérivée au point $\varepsilon = 0$ de la fonction

$$\varepsilon \mapsto H(r_1 + \varepsilon t_1, \dots, r_N + \varepsilon t_N)$$

et en déduire qu'il existe des réels α et β tels que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on ait

$$\log \frac{r_i}{p_i} = \alpha a_i + \beta.$$

c. Déterminer α et β en fonction de x, puis calculer $H(r_1, \dots, r_N)$.

d. Calculer le minimum de H sur Δ_a et le minimum de H sur Δ_b.

3. Démontrer que la suite des lois des variables aléatoires $\left(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right)_{n\geqslant 1}$ satisfait sur $\mathbb{R}$ un principe de grandes déviations de vitesse n et de fonction de taux Λ^*.

Cette partie est laissée blanche pour des raisons de mise en page

Exercice 3

Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une transition de phase pour le modèle d'Ising sur le réseau carré en dimension 2.

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini. On note $\Omega = \{0,1\}^E$ l'ensemble des configurations de percolation sur G. Pour tout $p \in [0,1]$, on note $\mathbb{P}_p$ la mesure de percolation de paramètre p sur Ω.

Soit $\omega \in \Omega$ une configuration de percolation. On note

- $|\omega|$ le nombre d'arêtes ouvertes de ω, c'est-à-dire $|\{e \in E : \omega_e = 1\}|$,
- $\mathsf{a}(\omega)$ le nombre d'agrégats de ω, c'est-à-dire le nombre de composantes connexes du graphe $(V, \{e \in E : \omega_e = 1\})$.

Pour tous réels $p \in [0,1]$ et $q \geqslant 1$, on définit sur Ω la mesure de probabilité $\mathbb{R}_{p,q}$ en posant, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{R}_{p,q}(\omega) = \frac{1}{Z_{p,q}} p^{|\omega|}(1-p)^{|E|-|\omega|} q^{\mathsf{a}(\omega)},$$

où $Z_{p,q}$ est la constante de normalisation qui fait de $\mathbb{R}_{p,q}$ une mesure de probabilité.

On rappelle que Ω est partiellement ordonné par l'inclusion de l'ensemble des arêtes ouvertes, c'est-à-dire que pour deux configurations ω et ω', on a $\omega \leqslant \omega'$ si et seulement si pour tout $e \in E$, $\omega_e \leqslant \omega'_e$. On rappelle aussi qu'étant donné deux mesures de probabilité μ et ν sur Ω, on dit que μ domine stochastiquement ν, et on note $\mu \succcurlyeq \nu$, si pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ croissante, on a l'inégalité $\mu(f) \geqslant \nu(f)$.

On *admettra* que la mesure $\mathbb{R}_{p,q}$ satisfait l'inégalité FKG, c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ croissantes, on a

$$\mathbb{R}_{p,q}[fg] \geqslant \mathbb{R}_{p,q}[f]\mathbb{R}_{p,q}[g].$$

On se donne $p_1, p_2 \in [0,1]$ et $q_1, q_2 \geqslant 1$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

a. Déterminer une fonction $h : \Omega \to \mathbb{R}$, ne dépendant pas de f, telle qu'on ait

$$\mathbb{R}_{p_2,q_2}[f] = \frac{\mathbb{R}_{p_1,q_1}[fh]}{\mathbb{R}_{p_1,q_1}[h]}.$$

b. Montrer que si $p_1 \leqslant p_2$ et $q_1 \geqslant q_2$, alors la fonction h est croissante et en déduire que $\mathbb{R}_{p_1,q_1} \preccurlyeq \mathbb{R}_{p_2,q_2}$.

c. Montrer que la fonction $\omega \mapsto |\omega| + \mathsf{a}(\omega)$ est croissante et en déduire que si l'on a $\frac{p_1}{q_1(1-p_1)} \geqslant \frac{p_2}{q_2(1-p_2)}$ et $q_1 \geqslant q_2$, alors $\mathbb{R}_{p_1,q_1} \succcurlyeq \mathbb{R}_{p_2,q_2}$.

d. Montrer que pour tout $p \in [0,1]$, on a

$$\mathbb{P}_{\frac{p}{2-p}} \preccurlyeq \mathbb{R}_{p,2} \preccurlyeq \mathbb{P}_p.$$

---

2. On introduit maintenant l'ensemble $\Sigma = \{-1,1\}^V$ de toutes les configurations dites *de spin* sur G. On note $\sigma = (\sigma_v)_{v \in V}$ un élément générique de Σ.

Pour tout réel $\beta > 0$, on définit la mesure $\mathbb{Q}_\beta$ sur Σ en posant, pour tout $\sigma \in \Sigma$,

$$\mathbb{Q}_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z_\beta} \exp\Bigg[\beta \sum_{\{x,y\} \in E} \sigma_x \sigma_y\Bigg].$$

Ici encore, Z_β est la constante qui assure que $\mathbb{Q}_\beta$ soit une mesure de probabilité.

On définit enfin, pour tout $p \in [0,1]$, la mesure $\mathbb{S}_p$ sur le produit cartésien $\Omega \times \Sigma$ en posant, pour tout $(\omega, \sigma) \in \Omega \times \Sigma$,

$$\mathbb{S}_p(\omega,\sigma) = \frac{1}{Z_p} \prod_{e=\{x,y\} \in E} \big((1-p)\mathbf{1}_{\{\omega_e = 0\}} + p\mathbf{1}_{\{\omega_e=1\}}\mathbf{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}}\big),$$

où Z_p est encore une fois la constante de normalisation appropriée.

---

a. On suppose p différent de 0 et de 1. Montrer que la loi marginale de la mesure $\mathbb{S}_p$ sur Σ est la mesure $\mathbb{Q}_\beta$, où p et β sont liés par la relation $p = 1 - e^{-2\beta}$.

b. Déterminer la loi marginale de la mesure $\mathbb{S}_p$ sur Ω.

c. Soit $\pi \in \Omega$ une configuration de percolation. Montrer que pour une paire (ω, σ) distribuée selon $\mathbb{S}_p$, et conditionnellement à ce que $\omega = \pi$, la configuration σ est uniformément distribuée parmi les configurations de spins qui sont constantes sur chaque agrégat de π.

d. Montrer que pour tous $x, y \in V$, on a

$$\mathbb{Q}_\beta(\sigma_x = \sigma_y) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathbb{R}_{p,2}(x \longleftrightarrow y).$$

3. On se place maintenant dans le réseau $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$. Pour tout $n \geqslant 0$, on note

- $B_n = [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ et $E_n = \{e = \{x, y\} \in \mathbb{E}^2 : x, y \in B_n\}$,
- $G_n = (B_n, E_n)$,
- $\partial B_n = \{x \in B_n : \exists y \notin B_n, \{x, y\} \in \mathbb{E}^2\}$ et $\partial E_n = \{e = \{x, y\} \in \mathbb{E}^2 : x, y \in \partial B_n\}$.

On définit ensuite

- $\Omega_n = \{0, 1\}^{E_n}$ et $\Sigma_n = \{-1, 1\}^{B_n}$,
- $\mathbb{P}_{n,p}$ la mesure de percolation de paramètre p sur Ω_n,
- $\mathbb{R}_{n,p,q}$ la mesure définie à la première question sur Ω_n lorsque $G = G_n$,
- $\mathbb{Q}_{n,\beta}$ la mesure définie à la deuxième question sur Σ_n lorsque $G = G_n$.

On note enfin

- $\Omega_n^\square = \{\omega \in \Omega_n : \forall e \in \partial E_n, \omega_e = 1\}$,
- $\Sigma_n^+ = \{\sigma \in \Sigma_n : \forall x \in \partial B_n, \sigma_x = 1\}$.
- $\mathbb{R}_{n,p,q}^\square$ le conditionnement de la mesure $\mathbb{R}_{n,p,q}$ sur le sous-ensemble $\Omega_n^\square$ de Ω_n,
- $\mathbb{Q}_{n,\beta}^+$ le conditionnement de la mesure $\mathbb{Q}_{n,\beta}$ sur le sous-ensemble Σ_n^+ de Σ_n.

On admettra que les relations de domination démontrées aux questions **1.b.** et **1.c.** restent vraies lorsque l'on remplace $\mathbb{R}_{p,q}$ par $\mathbb{R}_{n,p,q}^\square$.

On admettra aussi que pour tous $x, y \in B_n$ et pour tout $\beta > 0$ et $p = 1 - e^{-2\beta}$, on a

$$\mathbb{Q}_{n,\beta}^+(\sigma_x = \sigma_y) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathbb{R}_{n,p,2}^\square(x \longleftrightarrow y).$$

On note 0 l'origine de $\mathbb{Z}^2$ et on définit $m_n(\beta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{n,\beta}^+}[\sigma_0] = \mathbb{Q}_{n,\beta}^+(\sigma_0 = 1) - \mathbb{Q}_{n,\beta}^+(\sigma_0 = -1)$.

---

a. Montrer que pour tout $p \in [0, 1]$, on a $\mathbb{P}_{n,\frac{p}{2-p}} \preccurlyeq \mathbb{R}_{n,p,2}^\square \preccurlyeq \mathbb{P}_{n,p}$.

b. Montrer que $m_n(\beta) = \mathbb{R}_{n,p,2}^\square(0 \longleftrightarrow \partial B_n)$.

c. Montrer que la suite $(m_n(\beta))_{n \geqslant 0}$ est décroissante. On pourra commencer par écrire

$$\mathbb{R}_{n,p,2}^\square(0 \longleftrightarrow \partial B_n) = \mathbb{R}_{n+1,p,2}^\square(0 \longleftrightarrow \partial B_n | \forall e \in \partial E_n, \omega_e = 1).$$

d. On appelle magnétisation à la température inverse β le nombre

$$m(\beta) = \lim_{n \to \infty} m_n(\beta) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{n,\beta}^+}[\sigma_0].$$

Montrer que la fonction m est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Montrer qu'il existe $\beta_c > 0$ tel que $m(\beta) = 0$ pour $\beta < \beta_c$ et $m(\beta) > 0$ pour $\beta > \beta_c$. Donner un encadrement de β_c par deux réels strictement positifs.

—————— Fin du sujet ——————

Exercice 3

Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une transition de phase pour le modèle d'Ising sur le réseau carré en dimension 2.

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini. On note $\Omega = \{0, 1\}^E$ l'ensemble des configurations de percolation sur G. Pour tout $p \in [0, 1]$, on note $\mathbb{P}_p$ la mesure de percolation de paramètre p sur Ω.

Soit $\omega \in \Omega$ une configuration de percolation. On note

- $|\omega|$ le nombre d'arêtes ouvertes de ω, c'est-à-dire $|\{e \in E : \omega_e = 1\}|$,
- $\mathsf{a}(\omega)$ le nombre d'agrégats de ω, c'est-à-dire le nombre de composantes connexes du graphe $(V, \{e \in E : \omega_e = 1\})$.

Pour tous réels $p \in [0, 1]$ et $q \geqslant 1$, on définit sur Ω la mesure de probabilité $\mathbb{R}_{p,q}$ en posant, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{R}_{p,q}(\omega) = \frac{1}{Z_{p,q}} p^{|\omega|}(1-p)^{|E|-|\omega|} q^{\mathsf{a}(\omega)},$$

où $Z_{p,q}$ est la constante de normalisation qui fait de $\mathbb{R}_{p,q}$ une mesure de probabilité.

On rappelle que Ω est partiellement ordonné par l'inclusion de l'ensemble des arêtes ouvertes, c'est-à-dire que pour deux configurations ω et ω', on a $\omega \leqslant \omega'$ si et seulement si pour tout $e \in E$, $\omega_e \leqslant \omega'_e$. On rappelle aussi qu'étant donné deux mesures de probabilité μ et ν sur Ω, on dit que μ domine stochastiquement ν, et on note $\mu \succcurlyeq \nu$, si pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ croissante, on a l'inégalité $\mu(f) \geqslant \nu(f)$.

On *admettra* que la mesure $\mathbb{R}_{p,q}$ satisfait l'inégalité FKG, c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ croissantes, on a

$$\mathbb{R}_{p,q}[fg] \geqslant \mathbb{R}_{p,q}[f]\mathbb{R}_{p,q}[g].$$