Sorbonne Université — 2020 – 2021
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 26 novembre 2020

Contrôle continu

L'épreuve dure deux heures.
Les trois exercices sont indépendants.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.

Exercice 1

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = \frac{1}{2}$. Soit a un entier strictement positif. On pose $S_0 = a$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = a + Z_1 + \cdots + Z_n$. On définit les sous-tribus $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et $\mathscr{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ pour $n \geqslant 1$.

1. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose
$$M_n = \sum_{k=0}^{n} S_k - \frac{1}{3} S_n^3.$$
Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale.

2. Soit b un entier tel que $b > a$. On définit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geqslant 0 \colon S_n \in \{0, b\}\}$. On rappelle (et on ne demande pas de démontrer) que T est fini presque sûrement. Démontrer que $\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{b}$, puis en déduire que
$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T} S_n\right] = \frac{1}{3}(b^2 - a^2)a + a.$$

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale et T un temps d'arrêt sur cet espace filtré.

1. Montrer que si la suite $(M_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ est uniformément intégrable, alors
   a. $(M_n \mathbf{1}_{\{T=+\infty\}})_{n\geqslant 0}$ converge p.s et dans L^1 vers une variable aléatoire $X \in L^1$,
   b. $(M_{n\wedge T} \mathbf{1}_{\{T<+\infty\}})_{n\geqslant 0}$ converge p.s et dans L^1 vers $M_T \mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$,
   c. pour tout $n \geqslant 0$,
$$M_{n\wedge T} = \mathbb{E}[X + M_T \mathbf{1}_{\{T<+\infty\}} | \mathcal{F}_n].$$

2. Montrer que si $\mathbb{E}[|M_T| \mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}] < \infty$ et $\mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{T>n\}}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $(M_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ est uniformément intégrable et converge p.s et dans L^1 vers $M_T \mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$.

Exercice 3

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on considère une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et une variable aléatoire R à valeurs réelles positives. On suppose que

- $\mathbb{P}(T \geqslant n) > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ (c'est-à-dire que T n'est pas bornée),
- $\mathbb{P}(R > 0) = 1$ (c'est-à-dire que R est à valeurs strictement positives),
- pour tout $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $R\mathbf{1}_{\{T=n\}}$ est intégrable.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$X_n = R\mathbf{1}_{\{T \leqslant n\}}.$$

Enfin, on note $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration engendrée par la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose
$$Y_n = \frac{\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}}]}{\mathbb{P}(T \geqslant n)}\mathbf{1}_{\{T \geqslant n\}}.$$
Montrer que Y_n est mesurable par rapport à $\mathscr{F}_{n-1}$.
3. Pour tout $n \geqslant 0$, on définit la sous-tribu
$$\mathscr{G}_n = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T > n\} = \varnothing \text{ ou } \{T > n\} \subseteq A\}$$
de $\mathscr{F}$. (On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'une sous-tribu.) Montrer que X_n est mesurable par rapport à $\mathscr{G}_n$.
4. Calculer, pour tout $n \geqslant 1$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}} | \mathscr{G}_{n-1}]$.
5. On pose $M_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $M_n = X_n - \sum_{k=1}^n Y_k$. Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
6. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires telle que $Z_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, Z_n est mesurable pour $\mathscr{F}_{n-1}$. On suppose que $(X_n - Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ presque sûrement.
7. Montrer que la martingale $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement.

——— Fin du sujet ———

Solution de l'exercice 1

1. Fixons un entier $n \geqslant 0$. Pour tout entier $k \geqslant 0$, la variable aléatoire S_k est $\mathscr{F}_k$-mesurable, donc M_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable. De plus, pour tout $k \geqslant 0$, la variable aléatoire S_k et bornée par $a+k$, donc M_n est bornée par $(n+1)a + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+a)^3}{3}$. Elle est en particulier intégrable.

Calculons maintenant $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n]$, ou plutôt, puisque M_n est en partie définie comme une somme, $\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathscr{F}_n]$. On trouve

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1} - \tfrac{1}{3}(S_{n+1}^3 - S_n^3)|\mathscr{F}_n].$$

En utilisant le fait que $S_{n+1} = S_n + Z_{n+1}$, que Z_{n+1} est indépendante de $\mathscr{F}_n$ et centrée, on a

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathscr{F}_n] = S_n - \tfrac{1}{3}\mathbb{E}[S_{n+1}^3 - S_n^3|\mathscr{F}_n].$$

On a

$$S_{n+1}^3 = (S_n + Z_{n+1})^3 = S_n^3 + 3S_n^2 Z_{n+1} + 3S_n Z_{n+1}^2 + Z_{n+1}^3$$

et en tenant compte du fait que $Z_{n+1}^2 = 1$ et $Z_{n+1}^3 = Z_{n+1}$, ceci s'écrit

$$S_{n+1}^3 - S_n^3 = (3S_n^2 + 1)Z_{n+1} + 3S_n.$$

Puisque Z_{n+1} est indépendante de $\mathscr{F}_n$ et centrée, et puisque S_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable, on trouve donc

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^3 - S_n^3|\mathscr{F}_n] = 3S_n,$$

et on en déduit que

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathscr{F}_n] = 0,$$

ce qui conclut la preuve du fait que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

2. Puisque T est fini presque sûrement, la suite $(S_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers S_T, qui ne prend que les valeurs b et 0. Par ailleurs, la suite de variables aléatoires $(S_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ est bornée par b, donc cette convergence presque sûre est dominée, et a lieu aussi dans L^1. Ainsi, puisque la suite $(S_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ est une martingale, donc d'espérance constante,

$$a = \mathbb{E}[S_0] = \mathbb{E}[S_{0\wedge T}] = \mathbb{E}[S_{n\wedge T}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[S_T] = b\mathbb{P}(S_T = b),$$

si bien que $\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{b}$.

Considérons maintenant la suite $(M_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$. Cette suite est une martingale, si bien qu'on a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$a - \frac{1}{3}a^3 = \mathbb{E}[M_{0\wedge T}] = \mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n\wedge T} S_k\right] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[S_{n\wedge T}^3],$$

ou encore

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n\wedge T} S_k\right] = a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}\mathbb{E}[S_{n\wedge T}^3].$$

Lorsque n tend vers l'infini, $S_{n\wedge T}^3$ converge presque sûrement vers S_T^3 et cette convergence est dominée par b^3, donc elle a lieu dans L^1, et

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_{n\wedge T}^3] = \mathbb{E}[S_T^3] = ab^2.$$

Par ailleurs, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n\wedge T} S_k\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de variables aléatoires positives, qui converge presque sûrement vers $\sum_{k=0}^{T} S_k$ et le théorème de convergence monotone assure que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T} S_k\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n\wedge T} S_k\right] = \lim_{n\to\infty} (a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}\mathbb{E}[S_{n\wedge T}^3]) = \frac{1}{3}a(b^2 - a^2) + a,$$

ce qui est la valeur cherchée.

Commentaires — Il s'agit d'un exercice technique, dont l'objet est de vous permettre de montrer que vous connaissez les propriétés des martingales et savez les utiliser en les justifiant.

Il y avait une erreur dans l'énoncé, j'avais oublié le a dans la définition de S_n. Ceci ne semble heureusement avoir gêné personne.

1. • Écrire "M_n est mesurable", "M_n est clairement mesurable par définition", ou quelque chose de ce genre n'avance pas à grand-chose. Mesurable par rapport à quelle tribu ? Et si c'est clair, mieux vaut l'expliquer, au moins un peu. Écrire que "M_n est mesurable par somme" n'est pas meilleur mathématiquement, et syntaxiquement très bancal. En situation d'examen, on n'a certes pas le temps d'écrire un roman, mais écrire des phrases qui peuvent se lire est toujours mieux, si on le peut.

• Attention à bien distinguer ce que signifie "fini presque sûrement" et "intégrable". On peut avoir simultanément $\mathbb{P}(|X| < \infty) = 1$ et $\mathbb{E}\big[|X|\big] = \infty$. Une v.a. finie presque sûrement n'est pas nécessairement intégrable. Par contre, la réciproque est vraie : une v.a. intégrable est finie presque sûrement. Ce qui est aussi vrai, et utile, c'est qu'une variables aléatoire bornée est intégrable. Si c'est nécessaire, prenez ou reprenez un moment pour repenser à la différence entre 1. borné, 2. fini presque sûrement et 3. intégrable.

2. • La démonstration du fait que $\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{b}$ n'est pas difficile mais demande de justifier soigneusement un certain nombre de points.

- Puisque T est fini p.s., la variable aléatoire S_T est bien définie.
- Par définition de T, on a $S_T \in \{0, b\}$ p.s., si bien que S_T est bornée, donc intégrable, et $\mathbb{P}(S_T = b) = \mathbb{E}[S_T]/b$.

À ce point, écrire "$(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale donc $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[S_0] = a$" est une catastrophe : cela montre que vous n'avez pas vu ou pas voulu voir les difficultés qui pouvaient se poser. Je pense qu'il vaut mieux ne rien écrire plutôt que ce genre de non-arguments.

- Puisque T est un temps d'arrêt, la suite $(S_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

Il n'y a besoin d'aucune hypothèse sur T : mentionner ici le fait que T est fini presque sûrement est hors de propos (et laisse penser que vous croyez qu'une hypothèse est nécessaire alors qu'elle ne l'est pas).

- On a donc, pour tout $n \geqslant 0$, l'égalité $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[S_{T\wedge 0}]$. Or $T \wedge 0 = 0$ donc $\mathbb{E}[S_{T\wedge 0}] = \mathbb{E}[S_0] = a$.

Une fois qu'on a affirmé, à raison, que $(S_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ était une martingale, il n'est plus nécessaire d'invoquer le théorème d'arrêt pour en déduire que $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[S_{T\wedge 0}]$: on est seulement en train de dire que les variables aléatoires qui consituent une martingale ont toutes la même espérance.

On peut remplacer les deux derniers arguments par une application du théorème d'arrêt, en disant :

- Pour tout $n \geqslant 0$, le temps d'arrêt $T \wedge n$ est borné, et supérieur au temps d'arrêt 0, donc $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[S_0] = a$.

Il faut maintenant faire tendre n vers l'infini dans l'égalité $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = a$.

- Puisque T est fini presque sûrement, la suite $(S_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers la variable aléatoire S_T.

Ceci ne suffit pas à assurer la convergence des espérances. Il faut invoquer un argument de domination. J'ai lu plusieurs fois l'inégalité fausse $|S_{T\wedge n}| \leqslant |S_T|$. Sur l'événement $\{T > n\} \cap \{S_T = 0\}$, elle est en effet fausse : on est avant T, donc la marche est strictement positive, mais au temps T, qui est encore à venir, elle sera nulle.

- Par définition de T, on a pour tout $n \geqslant 0$ l'inégalité $|S_{T\wedge n}| \leqslant b$. Ainsi, la convergence presque sûre de $(S_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ vers S_T est dominée, par b.

Attention : il est vrai que $\mathbb{E}[|S_{T\wedge n}|] = \mathbb{E}[S_{T\wedge n}] \leqslant b$ pour tout $n \geqslant 0$, mais ceci ne permet pas d'appliquer le théorème de convergence dominée.

- Le théorème de convergence dominée assure que $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}]$ tend, lorsque n tend vers l'infini, vers $\mathbb{E}[S_T]$. Cette espérance vaut donc a.

• Comme dans la première partie de la question, on ne pouvait pas affirmer que $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$. En effet, le temps T n'est pas borné, et le théorème d'arrêt ne s'applique pas.

Il était donc indispensable de commencer par écrire $\mathbb{E}[M_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[M_0]$, puis de justifier la passage à la limite lorsque n tend vers l'infini. La convergence presque sûre de $M_{T\wedge n}$ vers M_T n'est pas évidemment dominée : en effet, une majoration possible est celle qui consiste à écrire, pour tout $n \geqslant 0$,

$$|M_{T\wedge n}| \leqslant (T \wedge n) \max\{|S_k| : k = 0, \ldots, T \wedge n\} + \tfrac{1}{3}|S_{T\wedge n}|^3 \leqslant Tb + \frac{b^3}{3}.$$

Cette majoration est correcte, mais pour en déduire que la convergence de $M_{T\wedge n}$ vers M_T est dominée dans L^1, il faut savoir que T est intégrable. C'est vrai, est c'est un résultat que certains ont vu en TD, mais ce n'est pas un résultat du cours : si vous voulez l'utiliser, il faut le démontrer. À part dans la copie d'une personne qui a utilisé cet argument, je n'ai lu aucune solution complètement convaincante de cette question (qui n'était à mon avis pas très facile).

Solution de l'exercice 2

1. a. La suite $(M_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ est une martingale : c'est le processus arrêté de la martingale $(M_n)_{n\geqslant 0}$ au temps d'arrêt T. Par hypothèse, cette martingale $(M_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ est uniformément intégrable. Elle converge donc presque sûrement et dans L^1 vers une variable aléatoire qui, par définition de la convergence dans L^1, est intégrable, et qu'on peut noter Y.

Par ailleurs, on a presque sûrement pour tout $n \geqslant 0$ l'égalité

$$M_n \mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} = M_{n\wedge T} \mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}.$$

On en déduit la convergence presque sûre

$$M_n \mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} Y \mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}.$$

Enfin, l'inégalité

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[|M_n \mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} - Y\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}|\big] &= \mathbb{E}\big[|M_{n\wedge T} \mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} - Y\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}|\big] \\ &\leqslant \mathbb{E}\big[|M_{n\wedge T} - Y|\big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

montre qu'on a aussi

$$M_n \mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} Y\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}},$$

si bien qu'on a le résultat attendu avec $X = Y\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}$.

b. Le fait que la suite $(M_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ converge p.s et dans L^1 vers Y entraîne, par le même raisonnement que nous venons de faire, la convergence

$$M_{n\wedge T}\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}, L^1} Y\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}.$$

Or par définition du processus arrêté, on a la convergence presque sûre

$$M_{n\wedge T}\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} M_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}.$$

On en déduit, par unicité de la limite presque sûre, que $Y\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}} = M_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$ presque sûrement, et que la convergence vers $M_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$ a aussi lieu dans L^1.

c. La suite $(M_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ converge dans L^1 vers Y. Ainsi, pour tout n, on a pour tout $m \geqslant n$ l'égalité

$$M_{n\wedge T} = \mathbb{E}[M_{m\wedge T}|\mathscr{F}_n]$$

et en utilisant le fait que l'appliation $Z \mapsto \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n]$ est continue de L^1 dans lui-même (car elle est 1-lipschitzienne), on en déduit, en faisant tendre m vers l'infini, que

$$M_{n\wedge T} = \mathbb{E}[Y|\mathscr{F}_n].$$

Par ailleurs, il découle des résultats des deux questions précédentes qu'on a

$$Y = Y\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} + M_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}} = X + M_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}},$$

ce qui conclut la démonstration.

2. (Première rédaction.) De l'égalité $M_{n\wedge T} = M_T\mathbf{1}_{\{T\leqslant n\}} + M_n\mathbf{1}_{\{T>n\}}$, vraie pour tout $n \geqslant 0$, on tire

$$|M_{n\wedge T}| \leqslant |M_T|\mathbf{1}_{\{T\leqslant n\}} + |M_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}} \leqslant |M_T|\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} + |M_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}}.$$

Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ et cherchons un $\delta > 0$ tel que pour tout événement $A \in \mathscr{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) < \delta$, on ait $\mathbb{E}[|M_{n\wedge T}|\mathbf{1}_A] < \varepsilon$. Puisque la variable aléatoire $|M_T|\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ est, par hypothèse, intégrable, la famille à un seul élément $\{|M_T|\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\}$ est uniformément intégrable et il existe donc $\delta_1 > 0$ tel que pour tout événement A tel que $\mathbb{P}(A) < \delta_1$, on ait $\mathbb{E}[|M_T|\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}] < \varepsilon/2$. Par ailleurs puisque la suite $(|M_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}})_{n\geqslant 0}$ converge, par hypothèse, vers 0 dans L^1, elle est également uniformément intégrable, et il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $A \in \mathscr{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) < \delta_2$ et tout $n \geqslant 0$, on ait $\mathbb{E}[|M_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}}\mathbf{1}_A] < \varepsilon/2$. En prenant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, on a ce qu'on souhaitait.

(Deuxième rédaction.) On a pour tout $n \geqslant 0$ l'égalité $M_{n\wedge T} = M_T\mathbf{1}_{\{T\leqslant n\}} + M_n\mathbf{1}_{\{T>n\}}$. Or d'une part, la suite $(M_T\mathbf{1}_{\{T\leqslant n\}})_{n\geqslant 0}$ est dominée par la variable aléatoire intégrable $|M_T|\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$, donc cette suite est uniformément intégrable ; et d'autre part, la suite $(|M_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}})_{n\geqslant 0}$ converge dans L^1 vers 0, donc elle est uniformément intégrable. La somme de deux suites uniformément intégrables étant uniformément intégrable, on a le résultat voulu.

D'après le résultat de la première question, la suite $(M_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ converge p.s et dans L^1 vers $X + M_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$, où X est la limite presque sûre et dans L^1 de la suite $(M_n\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}})$.

Or on a pour tout $n \geqslant 0$ l'inégalité $|M_n|\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} \leqslant |M_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}}$, et on a supposé que la suite $(|M_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}})_{n\geqslant 0}$ tendait vers 0 dans L^1. On en déduit que $X = 0$, et le résultat.

Commentaires — Cet exercice a eu peu de succès, peut-être à cause du fait que son énoncé était un peu intimidant.

Il n'est pas vrai qu'une suite uniformément intégrable de variables aléatoires converge presque sûrement et dans L^1 ; c'est toutefois vrai si la suite de variables aléatoires est une martingale. Mais la suite $(M_n\mathbf{1}_{\{T=\infty\}})_{n\geqslant 0}$ n'est pas une martingale, ni même une sur- ou sous-martingale, en général.

Dans la première question, il fallait utiliser le fait (en le démontrant) que si une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement (resp. dans L^1) vers une variable aléatoire X, et si A est un événement, alors la suite $(X_n\mathbf{1}_A)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement (resp. dans L^1) vers $X\mathbf{1}_A$.

Solution de l'exercice 3

1. Par définition de la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ lui est adapté. Ensuite, pour tout $n \geqslant 0$, l'égalité

$$X_n = R\mathbf{1}_{\{T=0\}} + \ldots + R\mathbf{1}_{\{T=n\}}$$

qui montre que X_n, qui est une somme finie de variables aléatoires intégrables, est intégrable. Enfin, donnons-nous un entier $n \geqslant 0$. Nous avons

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X_n + R\mathbf{1}_{\{T=n+1\}}|\mathscr{F}_n] = X_n + \mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n+1\}}|\mathscr{F}_n]$$

et puisque la variable aléatoire $R\mathbf{1}_{\{T=n+1\}}$ est positive, il en est de même de son espérance conditionnelle sachant $\mathscr{F}_n$, si bien que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \geqslant X_n.$$

Ceci montre que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale par rapport à sa filtration naturelle.

2. La variable aléatoire Y_n est de la forme $c\mathbf{1}_{\{T\geqslant n\}}$ pour une certaine constante réelle c. Il suffit donc de montrer que la variable aléatoire $\mathbf{1}_{\{T\geqslant n\}}$ est mesurable par rapport à $\mathscr{F}_{n-1}$. Or la variable aléatoire

$$\mathbf{1}_{\{X_{n-1}>0\}} = \mathbf{1}_{\{R>0\}}\mathbf{1}_{\{T\leqslant n-1\}}$$

est d'une part $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable, car c'est une fonction de X_{n-1}, et d'autre part, par hypothèse, presque sûrement égale à $\mathbf{1}_{\{T\leqslant n-1\}}$. Ainsi $\mathbf{1}_{\{T\geqslant n\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{T\leqslant n-1\}}$ est bien $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable.

3. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. Si $0 \notin B$, alors

$$\{X_n \in B\} \cap \{T > n\} = \{R \in B\} \cap \{T = n\} \cap \{T > n\} = \varnothing.$$

Si $0 \in B$, alors

$$\{X_n \in B\} \cap \{T > n\} = \big((\{R = 0\} \cap \{T = n\}) \cup \{T > n\}\big) \cap \{T > n\} = \{T > n\}.$$

Dans tous les cas, l'événement $\{X_n \in B\}$ appartient à la tribu $\mathscr{G}_n$. En particulier, on a $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{G}_n$.

4. Soit B un événement de $\mathscr{G}_{n-1}$. Nous avons

$$\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}}\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}}\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{T\leqslant n-1\}}] + \mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}}\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{T>n-1\}}].$$

La première espérance est nulle, et pour calculer la seconde, nous distinguons deux cas : soit $B\cap\{T > n-1\}$ est vide, auquel cas elle est nulle aussi, soit $B\cap\{T > n-1\} = \{T > n-1\}$, auquel cas elle vaut $\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}}\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{T>n-1\}}] = \mathbb{E}[R\mathbf{1}_{T=n}]$. Finalement,

$$\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}}\mathbf{1}_B] = \begin{cases} \mathbb{E}[R\mathbf{1}_{T=n}] & \text{si } \{T > n-1\} \subseteq B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons maintenant de la même manière $\mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_B]$. Nous avons

$$\mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{T\leqslant n-1\}}] + \mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{T>n-1\}}]$$

dont nous déduisons que

$$\mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_B] = \begin{cases} \mathbb{E}[Y_n] & \text{si } \{T > n-1\} \subseteq B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous observons maintenant que $\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}}] = \mathbb{E}[Y_n]$, si bien que dans tous les cas, nous avons $\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}}\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_B]$. Finalement,

$$\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}}|\mathscr{G}_{n-1}] = Y_n.$$

5. Considérons $n \geqslant 1$. Les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont toutes bornées, donc intégrables, donc M_n est intégrable. De plus, nous avons montré que $Y_1, \dots, Y_n$ étaient $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurables, donc $\mathscr{F}_n$-mesurables, donc M_n est aussi $\mathscr{F}_n$-mesurable.

Choisissons maintenant $n \geqslant 1$ et calculons $\mathbb{E}[M_n - M_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}]$. Nous trouvons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_n - M_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} - Y_n|\mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}} - Y_n|\mathscr{F}_{n-1}].\end{aligned}$$

Or puisque $\mathscr{F}_{n-1} \subseteq \mathscr{G}_{n-1}$, nous avons, d'après le résultat de la question précédente,

$$\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}} - Y_n|\mathscr{F}_{n-1}] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[R\mathbf{1}_{\{T=n\}} - Y_n|\mathscr{G}_{n-1}]\big|\mathscr{F}_{n-1}\big] = 0.$$

6. Soit $n \geqslant 1$. En utilisant successivement le fait que Z_n et Z_{n-1} sont $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurables, puis le fait que $\mathbb{E}[X_n - Z_n|\mathscr{F}_{n-1}] = X_{n-1} - Z_{n-1}$, puis le fait que $\mathbb{E}[M_n|\mathscr{F}_{n-1}] = M_{n-1}$, on trouve

$$\begin{aligned}Z_n - Z_{n-1} &= \mathbb{E}[Z_n - Z_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[Y_n|\mathscr{F}_{n-1}] \\ &= Y_n\end{aligned}$$

et on obtient la forme voulue pour Z_n.

7. La suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est presque sûrement croissante, donc presque sûrement convergente, vers R.

Sur l'événement $\{T = n\}$, on a $Y_k = 0$ pour tout $k \geqslant n+1$, si bien que la suite

$$\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)_{n\geqslant 1}$$

est presque sûrement stationnaire, donc presque sûrement convergente.

La suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$, qui est somme de deux suites presque sûrement convergentes, est donc presque sûrement convergente.

Commentaires — Cet exercice non plus n'a pas eu beaucoup de succès. Il a été plus traité que le précédent, mais souvent avec peu de bonheur.

Tout d'abord, beaucoup de gens ont pensé qu'il était supposé que T était un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Or ce n'était pas dit par l'énoncé, qui définissait simplement T comme une variable aléatoire. En particulier, à la question 2, il n'était pas automatique que l'événement $\{T \geqslant n\}$, ou son complémentaire $\{T \leqslant n-1\}$, appartiennent à $\mathscr{F}_{n-1}$. Il fallait le déduire de l'hypothèse que X_{n-1} est $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable, et de l'hypothèse que R était strictement positive (qui par contre était inutile dans la question 1, où il suffisait que R soit positive au sens large).

Fin du corrigé