Sorbonne Université — 2020 – 2021
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 26 mai 2021

Examen – Deuxième session

L'épreuve dure trois heures.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.

Exercice 1

Barème indicatif : 12 points (4×3).

Soient U, V, X, Y des variables aléatoires réelles intégrables sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. Montrer soigneusement que $h(X)$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X)$.
2. On suppose que U et X ont même loi, et que $h(U)$ est intégrable. Montrer soigneusement que $h(X)$ est intégrable.
3. On suppose que le couple (U, V) a même loi que le couple (X, Y). On suppose aussi que $\mathbb{E}[V|U] = h(U)$. Montrer que $\mathbb{E}[Y|X] = h(X)$.
4. On suppose que Y a même loi que $-Y$. Calculer $\mathbb{E}\big[\, Y \,\big|\, |Y| \,\big]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 8 points.

Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$, est-il possible qu'une martingale vérifie la propriété

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 0, \forall m \geqslant n, X_{m+1} > X_m) = 1 \quad ?$$

Si vous pensez que oui, construisez un exemple. Si vous pensez que non, démontrez-le.

Exercice 3

Barème indicatif : 24 points (6×4).

Soit E un espace d'états et P un noyau de transition markovien sur E. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\geqslant 0})$ sur E de noyau de transition P.

On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est harmonique si pour tout $x \in E$, on a

$$f(x) = \sum_{y\in E} P(x, y) f(y).$$

1. Donner un exemple de fonction harmonique non identiquement nulle.
2. Montrer que si E est un ensemble fini et P est irréductible, alors toute fonction harmonique est constante. Indication : on pourra se donner une fonction harmonique f, considérer $x \in E$ où f atteint son maximum, et montrer que pour tout y tel que $P(x, y) > 0$, on a $f(y) = f(x)$.
3. Déterminer, dans le cas de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire le cas où $E = \mathbb{Z}$ et $P(i, i + 1) = P(i, i - 1) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des fonctions harmoniques.

On revient au cas général et on se donne une fonction harmonique $f : E \to \mathbb{R}$. On fait l'hypothèse que cette fonction f est bornée.

4. Montrer que pour tout $x \in E$, la suite de variables aléatoires $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ est, sous $\mathbb{P}_x$, une martingale vis-à-vis de la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Que peut-on en déduire sur la convergence (en un ou des sens à préciser) de la suite $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$?

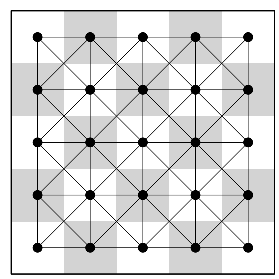
On suppose désormais que la chaîne est irréductible et récurrente. On fixe $x \in E$.

5. Soient y et z deux éléments de E tels que $f(y) < f(z)$. Montrer que $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, la suite $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ prend une infinité fois la valeur $f(y)$ et une infinité de fois la valeur $f(z)$. Au vu de la question précédente, que peut-on en déduire ?
6. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ qui satisfont les conditions suivantes :
   - $f(0,0) = 0$,
   - f est bornée,
   - pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, on a $f(i,j) = \frac{1}{4}\big[f(i+1,j) + f(i,j+1) + f(i-1,j) + f(i,j-1)\big]$.

Exercice 4

Barème indicatif : 12 points (4×3).
Les valeurs numériques correctes mais sans explications ne rapportent pas de points.

Sur un échiquier, le roi peut se déplacer en un coup d'une case à n'importe quelle case voisine, dans n'importe quelle direction, y compris en diagonale. Le graphe ci-contre a pour sommets les cases d'un échiquier 5×5, et deux cases sont reliées par une arête si et seulement si le roi peut se rendre en un coup de l'une à l'autre.



On fait partir le roi d'un coin de l'échiquier et on le laisse marcher au hasard sur l'échiquier : il choisit à chaque pas, uniformément et indépendamment de ses déplacements précédents, un déplacement parmi tous ceux qui lui sont permis.

1. Combien de temps le roi met-il en moyenne à revenir à son point de départ ?
2. Combien de fois passe-t-il, en moyenne, sur la case centrale de l'échiquier avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?
3. Lorsque la longueur de la promenade du roi tend vers l'infini, quelle est la limite de la proportion du temps qu'il a passée sur des cases situées sur le bord de l'échiquier ?
4. On fait partir un très grand nombre de rois du même coin de l'échiquier et on les laisse marcher au hasard indépendamment les uns des autres. Après un temps très long, on prend une photographie de l'échiquier. Que voit-on ?

———— Fin du sujet ————

Solution de l'exercice 1

1. Commençons par rappeler que $\sigma(X)$, qui est la tribu la plus pauvre sur Ω qui rende X mesurable, est exactement l'ensemble des images réciproques par Y des boréliens de $\mathbb{R}$:

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(C) : C \subseteq \mathbb{R}, C \text{ borélien}\}.$$

Dire que $h(X)$ est mesurable par rapport aux tribus $\sigma(X)$ et $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ signifie que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, l'image réciproque $h(X)^{-1}(B)$ de B par $h(X)$ appartient à $\sigma(X)$.

Considérons B un borélien de $\mathbb{R}$ et calculons l'image réciproque de B par $h(X)$:

$$\begin{aligned}(h(X))^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega : h(X(\omega)) \in B\}\\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in h^{-1}(B)\}\\ &= X^{-1}(h^{-1}(B)).\end{aligned}$$

Puisque h est une fonction mesurable, $h^{-1}(B)$ est un borélien de $\mathbb{R}$, et l'ensemble que nous venons de calculer est un élément de $\sigma(X)$, ce qu'il fallait démontrer.

2. L'hypothèse que U et X ont même loi signifie que les mesures images $\mathbb{P} \circ U^{-1}$ et $\mathbb{P} \circ X^{-1}$ sur $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ sont égales. Pour montrer que $h(X)$ est intégrable, calculons l'espérance de sa valeur absolue :

$$\mathbb{E}[|h(X)|] = \int_\Omega |h(X)| \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

En utilisant le théorème de changement de variables abstrait, on peut écrire cette intégrale sur $\mathbb{R}$:

$$\int_\Omega |h(X)| \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} |h(x)| \, \mathrm{d}(\mathbb{P} \circ X^{-1})(x)$$

et on peut maintenant utiliser l'hypothèse pour écrire que ceci vaut

$$\int_\mathbb{R} |h(x)| \, \mathrm{d}(\mathbb{P} \circ X^{-1})(x) = \int_\mathbb{R} |h(x)| \, \mathrm{d}(\mathbb{P} \circ U^{-1})(x)$$

et en faisant le chemin en sens inverse, que ceci vaut finalement

$$\int_\mathbb{R} |h(x)| \, \mathrm{d}(\mathbb{P} \circ U^{-1})(x) = \int_\Omega |h(U)| \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}[|h(U)|].$$

On a donc

$$\mathbb{E}[|h(X)|] = \mathbb{E}[|h(U)|] < \infty,$$

ce qui montre que $h(X)$ est intégrable.

3. C'est une question de cours. Il y a trois choses à vérifier.

D'abord, que $h(X)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X)$: cela nous est assuré par la première question.

Ensuite, que $h(X)$ est intégrable. Puisque (U, V) a même loi que (X, Y), les variables U et X ont même loi ; par ailleurs, $h(U)$, qui est l'espérance conditionnelle de V sachant U, est intégrable ; ainsi, la deuxième question nous assure que $h(X)$ est intégrable.

Enfin, il faut vérifier que pour tout événement $A \in \sigma(X)$, on a $\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_A]$. Considérons un événement $A \in \sigma(X)$. D'après ce que nous avons rappelé au début de la question 1, A est égal à $X^{-1}(B)$ pour un borélien B de $\mathbb{R}$. Calculons $\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A]$:

$$\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{X^{-1}(B)}] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_B(X)],$$

la dernière égalité provenant du fait que pour tout $\omega \in \Omega$, $\omega \in X^{-1}(B)$ équivaut, par définition de $X^{-1}(B)$, à $X(\omega) \in B$. En utilisant maintenant le fait que (U, V) a même loi que (X, Y), nous poursuivons notre calcul en écrivant

$$\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_B(X)] = \mathbb{E}[V\mathbf{1}_B(U)] = \mathbb{E}[V\mathbf{1}_{U^{-1}(B)}].$$

L'événement $U^{-1}(B)$ appartient à $\sigma(U)$: nous pouvons donc utiliser le fait que $\mathbb{E}[V|U] = h(U)$ pour écrire cette dernière espérance sous la forme

$$\mathbb{E}[V\mathbf{1}_{U^{-1}(B)}] = \mathbb{E}[h(U)\mathbf{1}_{U^{-1}(B)}] = \mathbb{E}[h(U)\mathbf{1}_B(U)].$$

Utilisant enfin le fait que U et X ont même loi, cette espérance est égale à

$$\mathbb{E}[h(U)\mathbf{1}_B(U)] = \mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_B(X)] = \mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_{X^{-1}(B)}] = \mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_A]$$

et nous sommes exactement arrivés où nous souhaitions.

4. Puisque Y a même loi que $-Y$, les vecteurs $(Y, |Y|)$ et $(-Y, |Y|)$ ont même loi. En effet, ils s'obtiennent en appliquant respectivement à Y et $-Y$ la fonction $t \mapsto (t, |t|)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Soit h une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[Y||Y|] = h(|Y|)$. En appliquant le résultat de la question 3 aux couples $(Y, |Y|)$ et $(-Y, |Y|)$ on en déduit que

$$\mathbb{E}[-Y||Y|] = h(|Y|) = \mathbb{E}[Y||Y|].$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}[Y||Y|] + \mathbb{E}[-Y||Y|] = 2h(|Y|).$$

Or par linéarité de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}[Y||Y|] + \mathbb{E}[-Y||Y|] = 0.$$

Ainsi, $h(|Y|) = 0$, et finalement,

$$\mathbb{E}[Y||Y|] = 0.$$

Solution de l'exercice 2

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ approprié, donnons-nous une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et telles que pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -n^2 + 1) = \frac{1}{n^2}.$$

Alors $\mathbb{E}[X_n] = 0$, si bien que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $M_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $M_n = X_1 + \ldots + X_n$, est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

Considérons l'événement

$$\{\exists n \geqslant 1, \forall m \geqslant n, X_m = 1\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{m \geqslant n} \{X_m = 1\}.$$

D'une part, le lemme de Borel–Cantelli assure que cet événement est de probabilité 1. D'autre part, cet événément peut s'écrire $\{\exists n \geqslant 1, \forall m \geqslant n, M_{m+1} - M_m = 1\}$ et est inclus dans l'événement $\{\exists n \geqslant 1, \forall m \geqslant n, M_{m+1} > M_m\}$, qui est donc de probabilité 1.

Solution de l'exercice 3

1. Soit f constante, identiquement égale à c. Soit x un élément de E. Puisque P est un noyau de transition, on a

$$\sum_{y\in E} P(x,y) = 1.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par c, on trouve l'égalité cherchée.

Ainsi, toute fonction constante est harmonique.

2. Supposons E fini et P irréductible. Considérons une fonction harmonique $f : E \to \mathbb{R}$. Nous allons montrer que si f atteint son maximum en $x \in E$, alors pour tout $y \in E$ tel que $P(x,y) > 0$, on a $f(y) = f(x) = \max f$.

Considérons $x \in E$ tel que $f(x) = \max f$ et écrivons

$$f(x) = \sum_{y\in E} P(x,y) f(y).$$

Cette égalité nous dit que $f(x)$ est une combinaison convexe des $f(y)$ pour $y \in E$ tel que $P(x,y) > 0$. Or $f(x)$ est plus grand (au sens large) que tous ces $f(y)$: ils ne peuvent donc que lui être égaux. Démontrons cela formellement.

Supposons qu'il existe z tel que $P(x,z) > 0$ et $f(z) < f(x)$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x,z)\underset{\wedge}{f(z)} + \sum_{y\neq z} P(x,y)\underset{\rotatebox{90}{$\geqslant$}}{f(y)} \\ &< P(x,z)f(x) + \sum_{y\neq z} P(x,y)f(x) \\ &= \sum_{y\in E} P(x,y)f(x) = f(x), \end{aligned}$$

si bien que $f(x) < f(x)$, ce qui est faux.

Considérons encore $x \in E$ tel que $f(x) = \max f$ et montrons maintenant par récurrence sur n que si $y \in E$ est tel que $P^n(x,y) > 0$, alors $f(y) = \max f$.

Pour $n = 1$, c'est ce que nous venons de démontrer. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$ et considérons y tel que $P^n(x,y) > 0$. Alors il existe une suite $x = y_0, \dots, y_n = y$ d'éléments de E telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on ait $P(y_i, y_{i+1}) > 0$. En particulier, $P^{n-1}(x, y_{n-1}) > 0$ et $P(y_{n-1}, y) > 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ puis au rang 1, on en déduit que $f(y_{n-1}) = \max f$, puis $f(y) = \max f$.

L'hypothèse que P est irréductible entraîne que pour tout $y \in E$, il existe $n \geqslant 0$ tel que $P^n(x,y) > 0$. Ainsi, f est constante.

L'hypothèse que E est fini ne nous a servi qu'à assurer l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $f(x) = \max f$. Si on suppose l'existence d'un tel élément, notre raisonnement reste valable, même si E est infini.

Nous avons donc démontré que si P est irréductible, alors toute fonction harmonique qui atteint son maximum est constante.

3. Pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, considérons une fonction $f : \mathbb{Z} \to R$ harmonique. Alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $f(i) = \frac{1}{2}(f(i+1) + f(i-1))$, ce qui peut se réécrire

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ f(i) - f(i-1) = f(i+1) - f(i).$$

La différence entre les valeurs de f en deux entiers successifs est donc constante. On en déduit immédiatement que f est la restriction à $\mathbb{Z}$ d'une fonction affine sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, les fonctions harmoniques sont, dans ce cas, les fonctions de la forme

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ f(i) = ai + b$$

où a et b sont des réels quelconques.

4. Pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire X_n est mesurable par rapport à $\mathscr{F}_n$, et la variable $f(X_n)$ l'est donc aussi. La suite de variables aléatoires $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ est donc adaptée à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Par ailleurs, chaque variable aléatoire $f(X_n)$ est bornée par $\|f\|_\infty$, donc intégrable.

Donnous-nous enfin $n \geqslant 0$. En utilisant la définition d'une chaîne de Markov, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(X_{n+1})|\mathscr{F}_n] &= \sum_{y\in E} \mathbb{E}_x[f(X_{n+1})\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=y\}}|\mathscr{F}_n] \\
&= \sum_{y\in E} \mathbb{P}_x(X_{n+1} = y|\mathscr{F}_n) f(y) \\
&= \sum_{y\in E} P(X_n, y) f(y)
\end{aligned}$$

et le fait que f soit harmonique assure que cette dernière quantité est égale à $f(X_n)$.

Ainsi, $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$. Cette martingale est bornée par $\|f\|_\infty$. Elle est donc bornée dans L^1, et même dans L^p pour tout $p < \infty$. Cette martingale converge donc presque sûrement et dans L^p pour tout $p < \infty$ vers une variable aléatoire qui est elle aussi bornée par $\|f\|_\infty$, et qui a donc en particulier des moments de tous ordres.

5. Soient $y, z \in E$ tels que $f(y) < f(z)$. Puisque la chaîne est irréductible et récurrente, nosu savons que sous $\mathbb{P}_x$, la chaîne visite, avec probabilité 1, une infinité de fois chaque éléments de E. En particulier, la suite $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ prend une infinité de fois la valeur $f(y)$, et une infinité de fois la valeur $f(z)$. Ceci entraîne qu'avec probabilité 1, la suite $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ ne converge pas. En effet, elle n'est pas de Cauchy ; on peut aussi le dire en écrivant qu'avec probabilité 1, on a

$$\varliminf_{n\to\infty} f(X_n) \leqslant f(y) < f(z) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f(X_n)$$

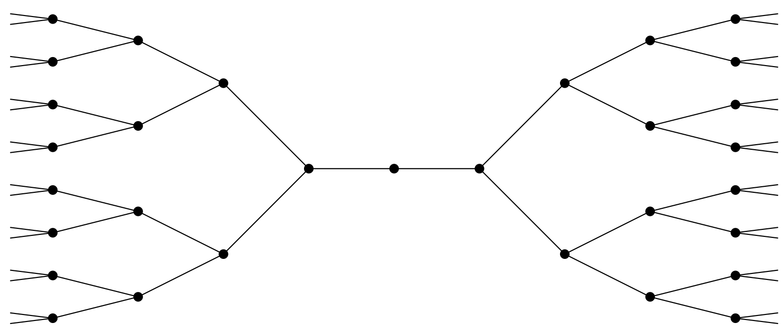
si bien que la limite inférieure et la limite supérieure de $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ sont distinctes.

La conclusion à laquelle nous venons d'arriver, qu'avec probabilité 1 la suite $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ n'est pas convergente, est contradictoire avec le résultat de la question précédente. L'hypothèse que nous avons faite, qu'il existait deux éléments y et z de E tels que $f(y) < f(z)$, est donc fausse. Autrement dit, la fonction f est constante.

Nous avons démontré que pour une chaîne irréductible et récurrente, toute fonction harmonique bornée est constante.

6. Les fonctions que nous cherchons sont les fonctions nulles à l'origine, bornées, et harmoniques pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$. Cette chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^2$ est irréductible et récurrente : d'après la question précédente, toute fonction harmonique bornée pour cette chaîne est donc constante. L'unique fonction qui satisfait les conditions données est donc la fonction nulle.

Complément. On peut se demander s'il existe dans certaines situations des fonctions harmoniques non constantes bornées. La réponse est qu'il en existe. Considérons l'arbre ci-dessous, qui est l'arbre binaire usuel dessiné d'une façon un peu particulière.



Notons E l'ensemble des sommets de cet arbre, et P le noyau de transition correspondant à la marche aléatoire simple sur ce graphe : du sommet central, on va avec probabilité $\frac{1}{2}$ à chacun des deux voisins, et de tout autre sommet, on va avec probabilité $\frac{1}{3}$ à chacun des trois voisins.

Pour chaque sommet x de l'arbre, notons $d(x)$ la distance de x au sommet central, c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui séparent x du sommet central. Ainsi, d vaut 0 sur le sommet central, 1 sur chacun de ses voisins, et ainsi de suite. Sur le dessin ci-dessus, $d(x)$ n'est autre que la valeur absolue de l'abscisse du point qui représente le sommet x. Pour tout sommet x situé à droite du sommet central, posons

$$f(x) = 1 - 2^{-d(x)}$$

et pour tout sommet situé à gauche du sommet central,

$$f(x) = -(1 - 2^{-d(x)}).$$

La fonction f est évidemment non constante, et presque aussi évidemment bornée par 1. On a même $\sup f = 1$ et $\inf f = -1$. Vérifions que f est harmonique. Soit x un sommet de l'arbre.

Si x est le sommet central, on a $f(x) = 0$, et f prend les valeurs $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ sur ses voisins : la relation à vérifier est bien satisfaite dans ce cas.

Si x n'est pas le sommet central, posons $n = d(x)$. Alors x a un voisin à distance $n-1$ du sommet central, et deux voisins à distance $n+1$. Ainsi,

$$\sum_{y\in E} P(x,y)f(y) = \pm\tfrac{1}{3}\Big((1 - 2^{-(n-1)}) + 2(1 - 2^{-(n+1)})\Big) = \pm(1 - 2^{-n}) = f(x),$$

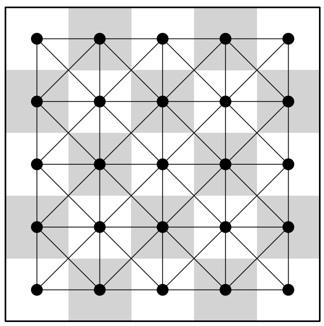
le signe étant $+$ si x est à droite du sommet central, et $-$ sinon.

Si vous voulez continuer à réfléchir à cet exemple, vous pouvez considérer une marche au hasard $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur ce graphe, c'est-à-dire une chaîne de Markov sur E de noyau de transition P, et réfléchir au comportement asymptotique de $d(X_n)$.

Solution de l'exercice 4

Le roi réalise une marche au hasard sur le graphe représenté dans l'énoncé. Ce graphe est fini et connexe, donc la marche au hasard est irréductible et récurrente positive. Elle admet donc une mesure invariante finie, unique à un facteur multiplicatif près.

Par ailleurs, on sait que la mesure μ qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible. Cette mesure est la suivante :



3	5	5	5	3
5	8	8	8	5
5	8	8	8	5
5	8	8	8	5
3	5	5	5	3

et on vérifie que sa masse totale est 144. L'unique probabilité invariante de la chaîne est donc $\pi = \mu/144$.

1. Appelons x un coin de l'échiquier. On sait que le temps moyen de retour en x vaut

$$\mathbb{E}_x[T_x] = \frac{1}{\pi(x)} = 48.$$

2. Le nombre moyen de visites en un sommet y avant le premier temps de retour en x est la valeur en y d'une mesure invariante qui donne la masse 1 à x. Si x est un coin de l'échiquier, par unicité de la mesure invariante, cette mesure est donc $\mu/3$. Cette mesure donne la masse $\frac{8}{3}$ à la case centrale.

Entre deux visites au coin inférieur gauche de l'échiquier, le roi passe donc, en moyenne, $\frac{8}{3}$ fois sur la case centrale.

3. Le théorème ergodique nous assure que pour chaque case de l'échiquier, la limite lorsque le temps tend vers l'infini de la proportion du temps passée sur cette case tend vers la masse que la probabilité invariante donne à cette case. Ainsi, la limite de la proportion du temps passé sur les cases situées sur le bord de l'échiquier est égale à la masse, pour la probabilité invariante, de l'ensemble de ces cases. Cette masse vaut $\frac{1}{2}$.

4. La marche des rois est apériodique, car il est par exemple possible de revenir en une case en deux coups, et aussi en trois couops. Le théorème de convergence vers l'équilibre s'applique donc. Sur une photographie prise après un temps long, on voit donc sur chaque case de l'échiquier un nombre de rois à peu près égal au nombre total de rois multiplié par la mesure de cette case pour l'unique probabilité invariante.

——— Fin du corrigé ———