Sorbonne Université — 2020 – 2021
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 26 mai 2021

Examen – Deuxième session

L'épreuve dure trois heures.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.

Exercice 1

Barème indicatif : 12 points (4×3).

Soient U, V, X, Y des variables aléatoires réelles intégrables sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. Montrer soigneusement que $h(X)$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X)$.
2. On suppose que U et X ont même loi, et que $h(U)$ est intégrable. Montrer soigneusement que $h(X)$ est intégrable.
3. On suppose que le couple (U, V) a même loi que le couple (X, Y). On suppose aussi que $\mathbb{E}[V|U] = h(U)$. Montrer que $\mathbb{E}[Y|X] = h(X)$.
4. On suppose que Y a même loi que $-Y$. Calculer $\mathbb{E}\big[\, Y \,\big|\, |Y| \,\big]$.

Exercice 2

Barème indicatif : 8 points.

Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$, est-il possible qu'une martingale vérifie la propriété

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 0, \forall m \geqslant n, X_{m+1} > X_m) = 1 \quad ?$$

Si vous pensez que oui, construisez un exemple. Si vous pensez que non, démontrez-le.

Exercice 3

Barème indicatif : 24 points (6×4).

Soit E un espace d'états et P un noyau de transition markovien sur E. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\geqslant 0})$ sur E de noyau de transition P.

On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est harmonique si pour tout $x \in E$, on a

$$f(x) = \sum_{y\in E} P(x, y) f(y).$$

1. Donner un exemple de fonction harmonique non identiquement nulle.
2. Montrer que si E est un ensemble fini et P est irréductible, alors toute fonction harmonique est constante. <u>Indication</u> : on pourra se donner une fonction harmonique f, considérer $x \in E$ où f atteint son maximum, et montrer que pour tout y tel que $P(x, y) > 0$, on a $f(y) = f(x)$.
3. Déterminer, dans le cas de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire le cas où $E = \mathbb{Z}$ et $P(i, i+1) = P(i, i-1) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des fonctions harmoniques.

On revient au cas général et on se donne une fonction harmonique $f : E \to \mathbb{R}$. On fait l'hypothèse que cette fonction f est bornée.

4. Montrer que pour tout $x \in E$, la suite de variables aléatoires $(f(X_n))_{n \geqslant 0}$ est, sous $\mathbb{P}_x$, une martingale vis-à-vis de la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$. Que peut-on en déduire sur la convergence (en un ou des sens à préciser) de la suite $(f(X_n))_{n \geqslant 0}$?

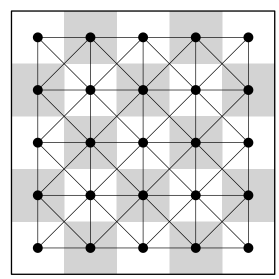
On suppose désormais que la chaîne est irréductible et récurrente. On fixe $x \in E$.

5. Soient y et z deux éléments de E tels que $f(y) < f(z)$. Montrer que $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, la suite $(f(X_n))_{n \geqslant 0}$ prend une infinité fois la valeur $f(y)$ et une infinité de fois la valeur $f(z)$. Au vu de la question précédente, que peut-on en déduire ?
6. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ qui satisfont les conditions suivantes :
   - $f(0,0) = 0$,
   - f est bornée,
   - pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, on a $f(i,j) = \frac{1}{4}\big[f(i+1,j) + f(i,j+1) + f(i-1,j) + f(i,j-1)\big]$.

Exercice 4

Barème indicatif : 12 points (4×3).
Les valeurs numériques correctes mais sans explications ne rapportent pas de points.

Sur un échiquier, le roi peut se déplacer en un coup d'une case à n'importe quelle case voisine, dans n'importe quelle direction, y compris en diagonale. Le graphe ci-contre a pour sommets les cases d'un échiquier 5×5, et deux cases sont reliées par une arête si et seulement si le roi peut se rendre en un coup de l'une à l'autre.



On fait partir le roi d'un coin de l'échiquier et on le laisse marcher au hasard sur l'échiquier : il choisit à chaque pas, uniformément et indépendamment de ses déplacements précédents, un déplacement parmi tous ceux qui lui sont permis.

1. Combien de temps le roi met-il en moyenne à revenir à son point de départ ?
2. Combien de fois passe-t-il, en moyenne, sur la case centrale de l'échiquier avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?
3. Lorsque la longueur de la promenade du roi tend vers l'infini, quelle est la limite de la proportion du temps qu'il a passée sur des cases situées sur le bord de l'échiquier ?
4. On fait partir un très grand nombre de rois du même coin de l'échiquier et on les laisse marcher au hasard indépendamment les uns des autres. Après un temps très long, on prend une photographie de l'échiquier. Que voit-on ?

—————— Fin du sujet ——————