Sorbonne Université 2020 – 2021
Probabilités approfondies – MU4MA011 5 janvier 2021

Examen – Première session

L'épreuve dure trois heures.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.

Exercice 1

Barème indicatif : 8 points (1+2+2+3).

Soit E un espace d'états et P un noyau de transition markovien sur E. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\geqslant 0})$ sur E de noyau de transition P.

1. On se donne un entier $n \geqslant 0$ et des éléments $x, x_0, \ldots, x_n$ de E. Donner sans démonstration la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)$.
2. On note $T_x = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = x\}$ le premier temps de retour en x. Donner, à l'aide de T_x, la définition des assertions "x est récurrent" et "x est transient".
3. Donner sans démonstration une caractérisation de la récurrence de x faisant intervenir le noyau P et ses puissances.
4. On note G la fonction de Green de la chaîne de Markov. Démontrer soigneusement que pour tous $x, y \in E$ distincts, on a $G(x,y) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)G(y,y)$. Montrer par un exemple que cette égalité n'est pas toujours vraie lorsque $x = y$.

Exercice 2

Barème indicatif : 10 points.

Est-il possible qu'une sur-martingale issue de 0 tende presque sûrement vers $+\infty$? Autrement dit, existe-t-il une sur-martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $X_0 = 0$ et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} +\infty$?

Si vous pensez que oui, construisez un exemple. Si vous pensez que non, démontrez-le.

Exercice 3

Barème indicatif : 24 points (6×4).

Soit E un espace d'états et P un noyau de transition markovien sur E. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\geqslant 0})$ sur E de noyau de transition P. On suppose la chaîne irréductible et récurrente positive.

Soit A une partie de E. On note $\tau_A = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in A\}$.

1. Montrer que pour tout $x \notin A$, on a la relation
$$\mathbb{E}_x[\tau_A] = 1 + \sum_{y\in E\setminus A} P(x,y)\mathbb{E}_y[\tau_A].$$
2. Soient x, y deux éléments de E tels que $P(x,y) > 0$. En calculant $\mathbb{E}_x[T_x]$ de deux manières, montrer que $\mathbb{E}_y[\tau_{\{x\}}] < \infty$.

3. Montrer que $\mathbb{E}_y[\tau_{\{x\}}] < \infty$ pour tous $x, y \in E$.
4. En déduire que si A est non vide, alors $\mathbb{E}_y[\tau_A] < \infty$ pour tout $y \in E$.

Soit B une partie finie de E. On appelle *temps de couverture* de B le premier temps où la chaîne a visité tous les éléments de B :

$$C_B = \inf\big\{n \geqslant 0 : \forall x \in B, \exists k \in \{0, \dots, n\}, X_k = x\big\}.$$

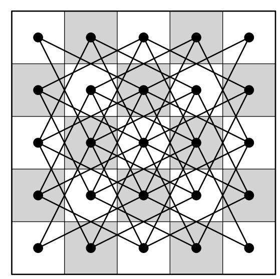
5. Montrer que $\mathbb{E}_y[C_B] < \infty$ pour tout $y \in E$.
6. On se donne un entier $N > 0$. On étudie le cas où $E = \{0, \dots, N\}$ et où $P(x, y) = \frac{1}{2}$ si $|x - y| = 1$ et $1 \leqslant x \leqslant N - 1$, et $P(0, 1) = P(N, N-1) = 1$.
   Calculer $\mathbb{E}_y[\tau_{\{0,N\}}]$ pour tout $y \in E$. (*Indication* : on pourra utiliser la question 1 et chercher cette espérance sous la forme d'un polynôme de degré 2 en y, ou bien considérer la suite $(X_n^2 - n)_{n \geqslant 0}$). Vérifier que $\mathbb{E}_1[\tau_{\{0,N\}}] = N - 1$.
7. Combien de temps faut-il en moyenne à la marche aléatoire sur un octogone régulier pour en visiter tous les sommets au moins une fois ?

Exercice 4

Barème indicatif : 12 points (4×3).

Les valeurs numériques correctes mais sans explications ne rapportent pas de points.

Sur un échiquier, un cavalier se déplace “en L”, en avançant de deux cases dans une direction (horizontale ou verticale) puis d'une case dans l'autre direction. Le graphe ci-contre a pour sommets les cases d'un échiquier 5×5, et deux cases sont reliées par une arête si et seulement si un cavalier peut se rendre en un coup de l'une à l'autre.



On fait partir un cavalier d'un coin de l'échiquier et on le laisse marcher au hasard sur l'échiquier : il choisit à chaque pas, uniformément et indépendamment de ses déplacements précédents, un déplacement parmi tous ceux qui lui sont permis.

1. Combien de temps le cavalier met-il en moyenne à revenir à son point de départ ?
2. Combien de fois passe-t-il, en moyenne, sur la case centrale de l'échiquier avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?
3. Lorsque la longueur de la promenade du cavalier tend vers l'infini, quelle est la limite de la proportion du temps qu'il a passée sur des cases situées sur le bord de l'échiquier ?
4. On fait partir un très grand nombre de cavaliers du même coin de l'échiquier et on les laisse marcher au hasard longtemps, indépendamment les uns des autres. La répartition des cavaliers sur l'échiquier finit-elle par se stabiliser ?

——— Fin du sujet ———

Solution de l'exercice 1

Il s'agit de questions de cours.

1. On a $\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \delta_{x,x_0} P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n)$.

2. Un état x est récurrent si et seulement si $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$. Il est transient si et seulement si $\mathbb{P}_x(T_x = \infty) > 0$.

3. Un état x est récurrent si et seulement si $\sum_{n \geqslant 0} P^n(x,x) = \infty$.

4. On écrit que $\mathbb{P}_x$-presque sûrement $N_y = (N_y \circ \theta_{T_y}) \mathbf{1}_{\{T_y < \infty\}}$ et on applique la propriété de Markov forte au temps T_y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[N_y] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[N_y | \mathscr{F}_{T_y}]] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[(N_y \circ \theta_{T_y}) \mathbf{1}_{\{T_y < \infty\}} | \mathscr{F}_{T_y}]] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_{T_y}}[N_y] \mathbf{1}_{\{T_y < \infty\}}] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_y[N_y] \mathbf{1}_{\{T_y < \infty\}}] \\
&= \mathbb{P}_x(T_y < \infty) G(y,y).
\end{aligned}$$

En prenant $E = \{a, b\}$ et $P(a,b) = P(b,b) = 1$, on a $G(a,a) = 1$ et $\mathbb{P}_a(T_a < \infty) = 0$, si bien que l'égalité est fausse.

Commentaires — 1. Les questions du type "Calculer...", "Donner une expression de...", "Donner la valeur de..." sont toujours ambigües. Par exemple, ici, la réponse

$$\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n),$$

bien que logiquement correcte, n'était évidemment pas la réponse attendue (d'ailleurs personne ne l'a donnée). Par contre, j'ai lu plusieurs fois

$$\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}_x(X_0 = x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n),$$

qui me faisait immanquablement penser "Et que vaut $\mathbb{P}_x(X_0 = x_0)$?".

2. Il est vrai que la proposition-définition du cours précise que $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$ si x est récurrent, mais ce n'est pas la définition, et il n'est pas nécessaier de mentionner N_x ici.

3. Il faut faire la différence entre les assertions "Si l'état x est récurrent, alors $G(x,x) = \infty$" et "L'état x est récurrent si et seulement si $G(x,x) = \infty$". Les deux sont vraies, mais la première ne répond que partiellement à la question posée.

4. Beaucoup ont dit que l'égalité n'était pas vraie lorsque $y = x$ dans le cas où x est transient, "parce que dans ce cas $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$, donc on ne peut pas avoir $G(x,x) = \mathbb{P}_x(T_x < \infty) G(x,x)$". Ce n'est pas tout à fait une justification suffisante. En effet, on a bel et bien, avec les conventions en vigueur dans la théorie de l'intégration,

$$\infty = \frac{1}{2} \infty.$$

Il faut donc préciser que lorsque x est transient, $G(x,x)$ est fini.

Solution de l'exercice 2

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ approprié, donnons-nous une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ indépendantes et telles que pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -n^2 + 1) = \frac{1}{n^2}.$$

Alors $\mathbb{E}[X_n] = 0$, si bien que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $M_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $M_n = X_1 + \ldots + X_n$, est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

Considérons l'événement

$$\{\exists p \geqslant 1, \forall n \geqslant p, X_n = 1\} = \bigcup_{p\geqslant 1} \bigcap_{n\geqslant p} \{X_n = 1\}.$$

D'une part, le lemme de Borel–Cantelli assure que cet événement est de probabilité 1. D'autre part, sur cet événément, la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

Ainsi, la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale issue de 0 et tend vers $+\infty$ presque sûrement.

Commentaires — À quelques rares exceptions près, presque tout le monde a essayé de montrer que c'était impossible (et même parmi ces exceptions, personne n'a construit d'exemple convaincant). L'argument le plus fréquemment employé était le suivant.

▷ Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'une sur-martingale $(M_n)_{n\geqslant 0}$ tende presque sûrement vers l'infini. Alors pour tout réel C, elle est supérieure à C à partir d'un certain rang :

$$\forall C \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ M_n \geqslant C.$$

Appliquons cela à $C = 1$: nous trouvons n_0 tel que

$$\mathbb{E}[M_{n_0}] \geqslant 1,$$

or par ailleurs

$$\mathbb{E}[M_{n_0}] \leqslant \mathbb{E}[M_0] = 0,$$

ce qui est contradictoire. ◁

(Au passage, il n'est pas nécessaire d'invoquer le théorème d'arrêt, comme certain(e)s l'ont fait, pour montrer que si $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une sur-martingale, alors la suite $(\mathbb{E}[M_n])_{n\geqslant 0}$ est décroissante : c'est une conséquence immédiate de la définition et de la positivité de l'espérance conditionnelle.)

Puisque le corrigé donne un exemple, le raisonnement ci-dessus est faux, et il est important de chercher, et de trouver, où se trouve l'erreur, ce que je vous laisse le plaisir de faire.

Incidemment, dans le corrigé, on aurait pu définir la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ indépendante et telle que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -2n^2 + 1) = \frac{1}{n^2},$$

de sorte que $\mathbb{E}[X_n] = -1$. Avec cette définition, la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une sur-martingale qui vérifie

$$M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[M_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty,$$

ces deux propriétés n'étant nullement contradictoire.

Solution de l'exercice 3

1. Puisque x n'appartient pas à A, on a $\mathbb{P}_x$-presque sûrement $\tau_A \geqslant 1$ et, plus précisément,

$$\tau_A = 1 + \tau_A \circ \theta_1.$$

En appliquant la propriété de Markov au temps 1, on obtient

$$\mathbb{E}_x[\tau_A] = 1 + \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\tau_A \circ \theta_1 | \mathscr{F}_1]] = 1 + \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_1}[\tau_A]] = 1 + \sum_{y \in E} P(x,y)\mathbb{E}_y[\tau_A].$$

Pour tout y appartenant à A, on a $\mathbb{P}_y$-presque sûrement $\tau_A = 0$, si bien qu'on peut enlever de la somme les termes où y appartient à A.

2. On a supposé la chaîne récurrente positive. On sait qu'elle admet donc une unique probabilité invariante, que nous notons π, qui donne une masse strictement positive à chaque élément de E. Nous savons aussi que

$$\mathbb{E}_x[T_x] = \frac{1}{\pi(x)} < \infty.$$

Par ailleurs, sous $\mathbb{P}_x$, on a presque sûrement $T_x = 1 + \tau_{\{x\}} \circ \theta_1$. Ainsi, en appliquant la propriété de Markov au temps 1 comme à la question précédente, on trouve

$$\mathbb{E}_x[T_x] = 1 + \sum_{z \in E} P(x,z)\mathbb{E}_z[\tau_{\{x\}}] \geqslant P(x,y)\mathbb{E}_y[\tau_{\{x\}}].$$

On en déduit

$$\mathbb{E}_y[\tau_{\{x\}}] \leqslant \frac{\mathbb{E}_x[T_x]}{P(x,y)} < \infty.$$

3. De la question 1 appliquée à $A = \{x\}$, et par le même raisonnement que nous venons de faire, on déduit que si u et v sont distincts de x et tels que $P(u,v) > 0$, et si $\mathbb{E}_u[\tau_{\{x\}}] < \infty$, alors

$$\mathbb{E}_v[\tau_{\{x\}}] \leqslant \frac{\mathbb{E}_u[\tau_{\{x\}}]}{P(u,v)} < \infty.$$

Soit maintenant y un élément de E. Si $y = x$, on a $\mathbb{E}_y[\tau_{\{x\}}] = 0$. Sinon, puisque la chaîne est irréductible, il existe $n \geqslant 1$ et une suite $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ d'éléménts de x deux à deux distincts tels que $P(x_i, x_{i+1}) > 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Alors d'après la question 2, on a $\mathbb{E}_{x_1}[\tau_{\{x\}}] < \infty$. En appliquant ensuite de manière répétée l'observation faite au début de la réponse à cette question, on obtient successivement le fait que $\mathbb{E}_{x_i}[\tau_{\{x\}}] < \infty$ pour $i = 2, \ldots, n$. Finalement, $\mathbb{E}_y[\tau_{\{x\}}] < \infty$.

4. Soit x un élément de A (qui est non vide). Alors $\tau_A \leqslant \tau_{\{x\}}$, si bien que

$$\mathbb{E}_y[\tau_A] \leqslant \mathbb{E}_y[\tau_{\{x\}}] < \infty.$$

5. On peut écrire le temps de couverture de B sous la forme $C_B = \max\{\tau_{\{x\}} : x \in B\}$. En particulier,

$$C_B \leqslant \sum_{x \in B} \tau_{\{x\}}$$

et C_B, qui est plus petit qu'une somme finie de variables aléatoires intégrables sous $\mathbb{P}_y$, est intégrable.

6. Pour tout $x \in E$, notons $f(x) = \mathbb{E}_x[\tau_{\{0,N\}}]$. On a $f(0) = f(N) = 0$ et, pour tout x compris entre 1 et N,

$$f(x) = 1 + \tfrac{1}{2} f(x+1) + \tfrac{1}{2} f(x-1).$$

On constate que la fonction $g(x) = x(N-x)$ vérifie ces propriétés. Posons $h = f - g$. On a $h(0) = h(N) = 0$ et, pour tout x compris entre 1 et N,

$$h(x) = \tfrac{1}{2} h(x+1) + \tfrac{1}{2} h(x-1).$$

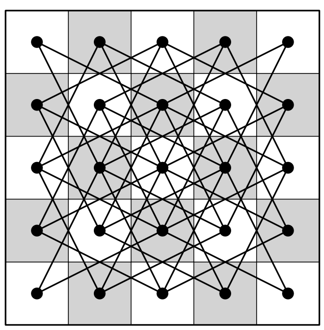
La fonction h est donc la restriction à $\{0, \ldots, N\}$ d'une fonction affine, et comme elle est nulle en 0 et en N, elle est identiquement nulle. Ainsi, $f = g$. Autrement dit,

$$\mathbb{E}_x[\tau_{\{0,N\}}] = x(N-x).$$

Solution de l'exercice 4

Le cavalier réalise une marche au hasard sur le graphe représenté dans l'énoncé. Ce graphe est fini et connexe, donc la marche au hasard est irréductible et récurrente positive. Elle admet donc une mesure invariante finie, unique à un facteur multiplicatif près.

Par ailleurs, on sait que la mesure μ qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible. Cette mesure est la suivante :



2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

et on vérifie que sa masse totale est 96. L'unique probabilité invariante de la chaîne est donc $\pi = \mu/96$.

1. Appelons x un coin de l'échiquier. On sait que le temps moyen de retour en x vaut

$$\mathbb{E}_x[T_x] = \frac{1}{\pi(x)} = 48.$$

2. Le nombre moyen de visites en un sommet y avant le premier temps de retour en x est la valeur en y d'une mesure invariante qui donne la masse 1 à x. Par unicité de la mesure invariante, cette mesure est donc $\mu/2$. Cette mesure donne la masse 4 à la case centrale.

Entre deux visites en x, on passe donc, en moyenne, 4 fois sur la case centrale.

3. Le théorème ergodique nous assure que pour chaque case de l'échiquier, la limite lorsque le temps tend vers l'infini de la proportion du temps passée sur cette case tend vers

la masse que la probabilité invariante donne à cette case. Ainsi, la limite de la proportion du temps passé sur les cases situées sur le bord de l'échiquier est égale à la masse, pour la probabilité invariante, de l'ensemble de ces cases. Cette masse vaut $\frac{1}{2}$.

4. La marche des cavaliers n'est pas apériodique, car à chaque pas la couleur de la case sur laquelle ils se trouvent change de couleur : ainsi, il n'est possible de retourner à son point de départ qu'en un nombre pair de coups, et comme c'est possible en deux coups, la période de la chaîne est 2. Elle n'est donc pas apériodique, et le théorème de convergence vers l'équilibre ne s'applique pas. La répartition des cavaliers ne se stabilise pas, en effet, puisqu'aux temps pairs ils sont tous sur des cases blanches, et aux temps impairs tous sur des cases noires.

Commentaires — Cet exercice était attendu (il y en a un de ce type dans chaque examen). Dans les trois premières questions, j'attendais comme réponse finale un nombre, et pas une formule. Et il vaut la peine, dans un exercice comme celui-là, de recompter une fois ou deux la somme des degrés de tous les sommets du graphe : cela évite d'avoir des réponses fausses à toutes les questions.

——— Fin du corrigé ———