Sorbonne Université 2020 – 2021
Probabilités approfondies – MU4MA011 5 janvier 2021

# Examen – Première session

*L'épreuve dure trois heures.*
*Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.*

## Exercice 1

*Barème indicatif : 8 points (1+2+2+3).*

Soit $E$ un espace d'états et $P$ un noyau de transition markovien sur $E$. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\geqslant 0})$ sur $E$ de noyau de transition $P$.

1. On se donne un entier $n \geqslant 0$ et des éléments $x, x_0, \ldots, x_n$ de $E$. Donner sans démonstration la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)$.
2. On note $T_x = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = x\}$ le premier temps de retour en $x$. Donner, à l'aide de $T_x$, la définition des assertions "$x$ est récurrent" et "$x$ est transient".
3. Donner sans démonstration une caractérisation de la récurrence de $x$ faisant intervenir le noyau $P$ et ses puissances.
4. On note $G$ la fonction de Green de la chaîne de Markov. Démontrer soigneusement que pour tous $x, y \in E$ distincts, on a $G(x,y) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)G(y,y)$. Montrer par un exemple que cette égalité n'est pas toujours vraie lorsque $x = y$.

## Exercice 2

*Barème indicatif : 10 points.*

Est-il possible qu'une sur-martingale issue de 0 tende presque sûrement vers $+\infty$ ? Autrement dit, existe-t-il une sur-martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $X_0 = 0$ et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} +\infty$ ?

Si vous pensez que oui, construisez un exemple. Si vous pensez que non, démontrez-le.

## Exercice 3

*Barème indicatif : 24 points (6×4).*

Soit $E$ un espace d'états et $P$ un noyau de transition markovien sur $E$. On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\geqslant 0})$ sur $E$ de noyau de transition $P$. On suppose la chaîne irréductible et récurrente positive.

Soit $A$ une partie de $E$. On note $\tau_A = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in A\}$.

1. Montrer que pour tout $x \notin A$, on a la relation
$$\mathbb{E}_x[\tau_A] = 1 + \sum_{y\in E\setminus A} P(x,y)\mathbb{E}_y[\tau_A].$$
2. Soient $x, y$ deux éléments de $E$ tels que $P(x,y) > 0$. En calculant $\mathbb{E}_x[T_x]$ de deux manières, montrer que $\mathbb{E}_y[\tau_{\{x\}}] < \infty$.

3. Montrer que $\mathbb{E}_y[\tau_{\{x\}}] < \infty$ pour tous $x, y \in E$.
4. En déduire que si $A$ est non vide, alors $\mathbb{E}_y[\tau_A] < \infty$ pour tout $y \in E$.

Soit $B$ une partie finie de $E$. On appelle *temps de couverture* de $B$ le premier temps où la chaîne a visité tous les éléments de $B$ :

$$C_B = \inf\big\{n \geqslant 0 : \forall x \in B, \exists k \in \{0, \dots, n\}, X_k = x\big\}.$$

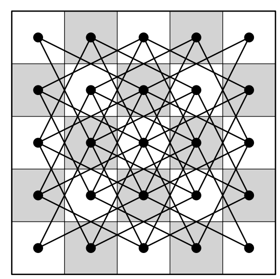
5. Montrer que $\mathbb{E}_y[C_B] < \infty$ pour tout $y \in E$.
6. On se donne un entier $N > 0$. On étudie le cas où $E = \{0, \dots, N\}$ et où $P(x, y) = \frac{1}{2}$ si $|x - y| = 1$ et $1 \leqslant x \leqslant N - 1$, et $P(0, 1) = P(N, N - 1) = 1$.
   Calculer $\mathbb{E}_y[\tau_{\{0,N\}}]$ pour tout $y \in E$. (*Indication* : on pourra utiliser la question 1 et chercher cette espérance sous la forme d'un polynôme de degré 2 en $y$, ou bien considérer la suite $(X_n^2 - n)_{n \geqslant 0}$). Vérifier que $\mathbb{E}_1[\tau_{\{0,N\}}] = N - 1$.
7. Combien de temps faut-il en moyenne à la marche aléatoire sur un octogone régulier pour en visiter tous les sommets au moins une fois ?

## Exercice 4

*Barème indicatif : 12 points (4×3).*

*Les valeurs numériques correctes mais sans explications ne rapportent pas de points.*

Sur un échiquier, un cavalier se déplace "en L", en avançant de deux cases dans une direction (horizontale ou verticale) puis d'une case dans l'autre direction. Le graphe ci-contre a pour sommets les cases d'un échiquier $5 \times 5$, et deux cases sont reliées par une arête si et seulement si un cavalier peut se rendre en un coup de l'une à l'autre.



On fait partir un cavalier d'un coin de l'échiquier et on le laisse marcher au hasard sur l'échiquier : il choisit à chaque pas, uniformément et indépendamment de ses déplacements précédents, un déplacement parmi tous ceux qui lui sont permis.

1. Combien de temps le cavalier met-il en moyenne à revenir à son point de départ ?
2. Combien de fois passe-t-il, en moyenne, sur la case centrale de l'échiquier avant de revenir pour la première fois à son point de départ ?
3. Lorsque la longueur de la promenade du cavalier tend vers l'infini, quelle est la limite de la proportion du temps qu'il a passée sur des cases situées sur le bord de l'échiquier ?
4. On fait partir un très grand nombre de cavaliers du même coin de l'échiquier et on les laisse marcher au hasard longtemps, indépendamment les uns des autres. La répartition des cavaliers sur l'échiquier finit-elle par se stabiliser ?

—— Fin du sujet ——