Sorbonne Université — 2019 – 2020

M2 Probabilités et Modèles Aléatoires – Théorèmes limites — 7 juillet 2020

Examen – Session 2

Il s'agit d'une épreuve orale.

Exercice 1. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. Que peut-on dire d'une application $f : E \to F$ telle que pour toute partie A de E, on ait l'inclusion

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

Exercice 2. L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ des mesures de probabilités boréliennes sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence étroite est-il compact ?

Exercice 3. On considère l'espace $C([0,1])$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour tout $n \geqslant 0$, on définit $f_n \in C([0,1])$ en posant, pour tout $t \in [0,1]$,

$$f_n(t) = \sin^2(\pi n t).$$

La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ admet-elle une sous-suite convergente ?

Exercice 4. Énoncer le théorème de Prokhorov.

Exercice 5. On se donne, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, une suite de variables aléatoires $(C_n)_{n\geqslant 1}$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, C_n soit de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n^2}$.

1. Étudier la suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$. (Montrer que la suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ presque sûrement.)
2. On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ en posant, pour tout $t \geqslant 0$,

$$f(t) = (1 - |1 - t|)^+$$

et on définit pour tout $n \geqslant 1$ la variable aléatoire X_n à valeurs dans $C([0,1])$ par

$$\forall t \in [0,1],\ X_n(t) = f(C_n t).$$

Étudier la convergence de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires bornées centrées. On se donne un entier $n \geqslant 1$ et un réel a. Donner une ou des majorations de la probabilité

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n > na).$$

Exercice 7. Énoncer le théorème de Sanov.

Exercice 8. On considère la percolation par arêtes sur $\mathbb{Z}^2$. On ajoute au graphe une arête reliant le sommet $(0, 0)$ au sommet $(1, 1)$. Comment cela modifie-t-il la probabilité de percolation ? La valeur critique du paramètre de percolation ?

Exercice 9. On considère le graphe formé en prenant deux copies de $\mathbb{Z}^2$, dans chacune desquelles chaque sommet est relié à ses quatre voisins les plus proches, et où chaque sommet d'une copie de $\mathbb{Z}^2$ est relié par une arête à son homologue de l'autre copie de $\mathbb{Z}^2$.

Que peut-on dire de la percolation par arêtes sur ce graphe ?