Sorbonne Université | 2019 – 2020
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires – Théorèmes limites | 20 janvier 2020

Examen

L'épreuve dure trois heures.
L'usage des notes de cours et d'ouvrages est autorisé, mais pas des téléphones.

Exercice 1. On rappelle qu'une partie d'un espace métrique est compacte si de toute famille de parties ouvertes dont l'union contient cette partie, on peut extraire une sous-famille finie dont l'union contient encore cette partie.

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de E qui converge vers un élément x de E. Montrer que la partie

$$\{x_n : n \geqslant 0\} \cup \{x\}$$

de E est compacte.

2. On note $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité sur E. Rappeler la définition de la convergence étroite d'une suite d'éléments de $\mathcal{M}(E)$.

3. Rappeler la définition d'une partie tendue de $\mathcal{M}(E)$, puis l'énoncé du théorème de Prokhorov.

4. Rappeler la définition d'une partie uniformément équicontinue de l'espace $C([0, 1])$ des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[0, 1]$, puis l'énoncé du théorème d'Arzelà–Ascoli.

Exercice 2. Dans cet exercice, on pourra utiliser le critère de tension suivant, dû à Kolmogorov.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $C([0,1])$. On suppose

- *que pour tout $t \in [0,1]$, la suite $(X_n(t))_{n\geqslant 1}$ est tendue, et*
- *qu'il existe des réels $\beta, p, C > 0$ tels que pour tous $n \geqslant 1$ et $s,t \in [0,1]$, on ait*

$$\mathbb{E}\big[|X_n(s) - X_n(t)|^p\big] \leqslant C|t-s|^{1+\beta}.$$

Alors la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est tendue.

Soit $(\xi_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in [0,1]$, on considère l'unique entier $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $\frac{k}{n} \leqslant t < \frac{k+1}{n}$ et on pose

$$S^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\big((k+1-nt)S_k + (nt-k)S_{k+1}\big) = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_k + (nt-k)\xi_{k+1}).$$

1. Calculer, pour tout $N \geqslant 1$, l'espérance $\mathbb{E}[(\xi_1 + \ldots + \xi_N)^4]$ et montrer qu'il existe une constance C indépendante de N telle que cette espérance soit inférieure ou égale à CN^2.

2. Montrer que la suite $(S^{(n)})_{n\geqslant 1}$ vérifie le critère de Kolmogorov pour des valeurs de β, p et C qu'on précisera. En déduire que cette suite converge en loi vers une limite qu'on précisera.

Exercice 3. Dire aussi précisément que possible, en utilisant un résultat de grandes déviations, comment se comporte, lorsque n tend vers l'infini, la probabilité, si on lance n fois un dé équilibré, d'obtenir un 6 au moins $n/4$ fois.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On note Λ le logarithme de la transformée de Laplace de X_1, qu'on suppose finie en tout point de $\mathbb{R}$, et Λ^* la transformée de Legendre de Λ. Pour tout $n \geqslant 1$, on note μ_n la loi de $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$.

1. Rappeler les définitions de Λ et Λ^* et démontrer que ces deux fonctions sont convexes.

2. Donner une démonstration du fait que pour toute partie G ouverte de $\mathbb{R}$, on a

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geqslant -\inf\{\Lambda^*(x) : x \in G\}.$$

On pourra admettre certains résultats intermédiaires, à condition de les énoncer clairement. Ce qu'il est bienvenu d'admettre ou de démontrer est laissé à votre appréciation.

Exercice 5. On considère le graphe dont les sommets sont les points de $\mathbb{Z}^2$ et où deux sommets sont reliés par une arête si et seulement s'ils sont à distance euclidienne 1.

1. De ce graphe, on considère le sous-graphe $\mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}$ (avec les arêtes dont les deux extrémités sont dans cet ensemble). La percolation de Bernoulli sur les arêtes de ce sous-graphe admet-elle une transition de phase ?

2. Qu'en est-il du sous-graphe dont l'ensemble des sommets est $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$?

3. Pour les cas parmi les deux que vous venez d'étudier où il y a une transition de phase, que savez-vous de la valeur du paramètre critique ? (Des démonstrations complètes ne sont pas demandées.)

Exercice 6. On considère la percolation de Bernoulli sur les arêtes du graphe $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$. Pour cela, on se donne une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, 1]$, cette famille contenant une variable U_e pour chaque arête $e \in \mathbb{E}^2$. On pose, pour toute arête $e \in \mathbb{E}^2$ et tout $p \in [0, 1]$,

$$\omega_{p,e} = 1 \text{ si } U_e \leqslant p,\ \ \omega_{p,e} = 0 \text{ sinon.}$$

Pour chaque $p \in [0, 1]$, on note $\mathbb{P}_p$ la loi de la configuration $\omega_p = (\omega_{p,e})_{e \in \mathbb{E}^2}$.

On rappelle qu'on note également, pour tout $p \in [0, 1]$,

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty).$$

On a démontré qu'il existait $p_c \in \,]0, 1[$ (on sait même que $p_c = \frac{1}{2}$, mais c'est sans importance ici) tel que $\theta(p)$ soit nul pour tout $p < p_c$ et strictement positif pour tout $p > p_c$.

On rappelle enfin que pour tout $p > p_c$, il y a sous $\mathbb{P}_p$ un unique agrégat ouvert infini, dont on note C_p l'ensemble des sommets.

1. On se donne $p_0 > p_c$. Montrer que

$$\theta(p_0) - \lim_{\substack{p \to p_0 \\ p < p_0}} \theta(p) = \mathbb{P}(0 \in C_{p_0} \text{ mais } 0 \in C_p \text{ pour aucun } p < p_0).$$

On note A l'événement dont le membre de droite est la probabilité.

2. On se donne p_1 tel que $p_c < p_1 < p_0$. Vérifier que lorsque l'événement A est réalisé, 0 n'est connecté à C_{p_1} dans aucune des configurations ω_p pour $p_1 \leqslant p < p_0$.

En considérant un chemin d'arêtes ouvertes sous $\mathbb{P}_p$ qui relie 0 à C_{p_1}, montrer qu'il existe, lorsque A est réalisé, une arête $e \in \mathbb{E}^2$ telle que $U_e = p_0$.

Conclure.

—— Fin du sujet ——

Exam paper

The exam duration is three hours.
It is allowed to use manuscript notes and books, but no phones.

Exercice 1. A subset of a metric space is compact if from any family of open subsets the union of which contains this subset, one can extract a finite sub-family, the union of which still contains the subset.

Let (E, d) be a metric space.

1. Let $(x_n)_{n\geqslant 0}$ be a sequence of elements of E that converges to an element x of E. Prove that

$$\{x_n : n \geqslant 0\} \cup \{x\}$$

is a compact subset of E.

2. Let $\mathcal{M}(E)$ be the set of Borel probability measures on E. Give the definition of the weak convergence of sequence of elements of E.

3. Give the definition of a tight subset of $\mathcal{M}(E)$ and state Prokhorov's theorem.

4. Give the definition of a uniformly equicontinuous subset of the space $C([0, 1])$ of real-valued continuous functions on $[0, 1]$, then state Arzelà–Ascoli's theorem.

Exercice 2. In this exercice, one can use the following criterion, due to Kolmogorov.

Let $(X_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of random variables with values in $C([0,1])$. Assume that

- *for all $t \in [0,1]$, the sequence $(X_n(t))_{n\geqslant 1}$ is tight, and*
- *there exists $\beta, p, C > 0$ such that ffor all $n \geqslant 1$ and $s, t \in [0,1]$, one has*

$$\mathbb{E}\big[|X_n(s) - X_n(t)|^p\big] \leqslant C|t-s|^{1+\beta}.$$

Then the sequence $(X_n)_{n\geqslant 1}$ is tight.

Let $(\xi_i)_{i\geqslant 1}$ be a sequence of i.i.d. r.v. with $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Set $S_0 = 0$ and for all $k \geqslant 1$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. For all $n \geqslant 1$ and all $t \in [0,1]$, consider the unique integer $k \in \{0, \ldots, n\}$ such that $\frac{k}{n} \leqslant t < \frac{k+1}{n}$ and set

$$S^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\big((k+1-nt)S_k + (nt-k)S_{k+1}\big) = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_k + (nt-k)\xi_{k+1}).$$

1. Compute, for all $N \geqslant 1$, the expectation $\mathbb{E}[(\xi_1 + \ldots + \xi_N)^4]$ and prove that there exists C independent of N such that this expectation is less or equal to CN^2.

2. Prove that the sequence $(S^{(n)})_{n\geqslant 1}$ satisfies Kolmogorov's criterion for certain values of β, p and C. Deduce that this sequence converges in distribution to a limit, and describe this limit.

Exercice 3. Explain as precisely as possible, using a result of large deviations, how, as n tends to infinity, behaves the probability that, if one throws a fair dice n times, one gets a 6 at least $n/4$ times.

Exercice 4. Let $(X_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of i.i.d. random variables. Let Λ be the logarithm of the Laplace transform of X_1. The function Λ is assumed to be finite at every point of $\mathbb{R}$. Let Λ^* denote the Legendre transform of Λ. For all $n \geqslant 1$, let μ_n be the distribution of $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$.

1. Give the definitions of Λ and Λ^* and prove that both functions are convex.

2. Give a proof of the fact that for every open subset G of $\mathbb{R}$, one has

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geqslant -\inf\{\Lambda^*(x) : x \in G\}.$$

It is allowed to admit some intermediary results, provided they are stated clearly. What should be proved and what should be admitted is left to you to choose.

Exercice 5. Consider the graph with vertex set $\mathbb{Z}^2$, in which two vertices are joined by an edge if and only if they are at Euclidean distance 1.

1. In this graph, consider the sub-graph $\mathbb{Z} \times \{0,1,2\}$ (with the edges joining two vertices in this set). Does the Bernoulli bond percolation on this sub-graph admit a phase transition ?

2. What about $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$?

3. In those of the two cases that you just studied where there is a phase transition, what do you know about the critical value of the parameter ? (No proofs are required.)

Exercice 6. We consider Bernoulli bond percolation on $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$. For this, we take an i.i.d. family $(U_e)_{e \in \mathbb{E}^2}$ of uniform r.v. on $[0,1]$ and we set, for each $p \in [0,1]$ and each $e \in \mathbb{E}^2$,

$$\omega_{p,e} = 1 \text{ si } U_e \leqslant p, \ \omega_{p,e} = 0 \text{ sinon.}$$

For each $p \in [0,1]$, we denote by $\mathbb{P}_p$ the distribution of the configuration $\omega_p = (\omega_{p,e})_{e \in \mathbb{E}^2}$.

Recall that we denote, for each $p \in [0,1]$,

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty).$$

We proved that there exists $p_c \in \,]0,1[$ (indeed $p_c = \frac{1}{2}$) such that $\theta(p)$ vanishes for all $p < p_c$ and is positive for all $p > p_c$.

Recall that for all $p > p_c$, there is under $\mathbb{P}_p$ almost surely a unique infinite open cluster, that we denote by C_p.

1. Choose $p_0 > p_c$. Prove that

$$\theta(p_0) - \lim_{\substack{p \to p_0 \\ p < p_0}} \theta(p) = \mathbb{P}(0 \in C_{p_0} \text{ but } 0 \in C_p \text{ for no } p < p_0).$$

We denote by A the event of which the right-hand side is the probability.

2. Fix p_1 such that $p_c < p_1 < p_0$. Check that on the event A , the vertex 0 is not connected to C_{p_1} in any of the configurations ω_p for $p_1 \leqslant p < p_0$.

By considering a path of edges that are open under $\mathbb{P}_p$ and that joins 0 to C_{p_1}, prove that there exists, on A, an edge $e \in \mathbb{E}^2$ such that $U_e = p_0$.

Draw a conclusion.

—— End ——