Sorbonne Université — 2019 – 2020

Probabilités approfondies – MU4MA011 — 9 juin 2020

Examen – Deuxième session

Vous avez jusqu'à 13h00 pour composer et rendre votre copie.

Pour rendre votre copie, vous devrez la scanner ou la photographier, puis choisir une des options ci-dessous :

- *m'envoyer le fichier par mail à* `thierry.levy@sorbonne-universite.fr`
- *me l'envoyer par Smash :* `https://fromsmash.com/`
- *me l'envoyer par WeTransfer :* `https://wetransfer.com/`

Le sujet comporte cinq exercices, dont les énoncés se trouvent sur cette page et les trois qui suivent. Il n'est pas nécessaire de résoudre complètement les cinq exercices pour obtenir une note honorable.

Exercice 1. 1. Déterminer le nombre de tribus qui existent sur l'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Parmi ces tribus, combien ont 4 éléments ? 9 éléments ? 16 éléments ?

2. Sur un ensemble Ω quelconque, on se donne une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire une suite croissante de tribus. On pose $\mathscr{C} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathscr{F}_n$. Parmi les assertions suivantes, indiquer lesquelles sont nécessairement vraies et en donner une démonstration.

(i) $\varnothing \in \mathscr{C}$ et $\Omega \in \mathscr{C}$

(ii) Pour tous $A, B \in \mathscr{C}$, on a $A \cap B \in \mathscr{C}$

(iii) Pour toute suite $(A_k)_{k\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{C}$, on a $\bigcup_{k\geqslant 0} A_k \in \mathscr{C}$

(iv) $\mathscr{C}$ est une tribu

Exercice 2. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \geqslant y^2\}$. On considère un vecteur aléatoire (X, Y) dont la loi admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ la densité

$$f(x, y) = c\, e^{-x} \mathbf{1}_D(x, y),$$

où c est un réel.

1. Dessiner le domaine D.
2. Calculer c.
3. Déterminer les densités des lois de X et de Y.
4. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[Y|X]$, $E[X|Y]$ et $\mathbb{E}[g(Y)|X]$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée arbitraire.

Exercice 3. On considère sur $\mathbb{Z}$ le noyau de transition P donné, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, par

$$P(x, y) = \tfrac{1}{3} \text{ si } |x - y| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad P(x, y) = 0 \text{ sinon.}$$

On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, X = (X_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{Z}})$ sur $\mathbb{Z}$ de noyau de transition P. On pourra utiliser sans le démontrer le fait que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, sous $\mathbb{P}_x$, les variables aléatoires $(X_{n+1} - X_n)_{n\geqslant 0}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.

On se donne $a < x < b$ trois entiers relatifs et on définit

$$T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = a \text{ ou } X_n = b\}.$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et qu'il est fini $\mathbb{P}_x$-presque sûrement.
2. Déterminer la loi de X_T sous $\mathbb{P}_x$.
3. Déterminer une fonction simple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que le processus $(X_n^2 - f(n))_{n\geqslant 0}$ soit une martingale sous $\mathbb{P}_x$ relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $Q_n = X_n^2 - f(n)$.

En étudiant le processus arrêté $Q^T = (Q_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$, calculer $\mathbb{E}[T]$.

4. On fixe maintenant $x = 1$ et on pose, pour tout $k \geqslant 2$,

$$T_k = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = k\}.$$

Montrer que $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, la suite $(T_k)_{k\geqslant 2}$ est croissante et converge vers une limite que l'on explicitera, et que l'on notera S.

5. Calculer $\mathbb{E}_1[S]$ et $\mathbb{P}_1(S = \infty)$. Que venez-vous de démontrer à propos de la chaîne de Markov X ?

Exercice 4. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on considère un jeu de pile ou face infini, modélisé par une suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de variables indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$. Par convention, on posera $\xi_0 = -1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit

$$L_n = \max\{k \in \{1, \ldots, n\} : \xi_n = \xi_{n-1} = \ldots = \xi_{n-k+1} \text{ et } \xi_{n-k+1} \neq \xi_{n-k}\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'événement $\{\xi_{n+1} = \xi_n\}$ est indépendant de la tribu $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. (*On pourra utiliser le fait que tout élément de cette tribu est une union disjointe d'événements de la forme* $\{\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\}$, *avec* $i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1\}$.)

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}[f(L_{n+1})|L_1, \ldots, L_n] = \tfrac{1}{2}f(1) + \tfrac{1}{2}f(L_n + 1).$$

3. Décrire la loi de L_n pour tout $n \geqslant 1$. (*On pourra commencer par le faire pour les petites valeurs de* n.)

4. Le résultat de la question 2 montre que $(L_n)_{n\geqslant 1}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ (on ne demande pas de préciser ce point). Décrire la matrice de transition, qu'on notera P, de cette chaîne de Markov.

On suppose qu'on a, sur notre espace de probabilités, une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ de matrice de transition P, pour laquelle on conserve la notation $L = (L_n)_{n\geqslant 1}$. Ceci nous permet de parler de la chaîne issue de x pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, et de noter $\mathbb{P}_x$ la probabilité correspondante. Ainsi, la probabilité $\mathbb{P}$ qu'on a utilisée jusqu'à maintenant, et sous laquelle $L_1 = 1$ presque sûrement, est désormais notée $\mathbb{P}_1$.

On fixe désormais un entier $\ell \geqslant 1$. On définit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geqslant 1 : L_n = \ell\}$. On pose, pour tout $x \geqslant 1$,

$$g(x) = \mathbb{E}_x[T].$$

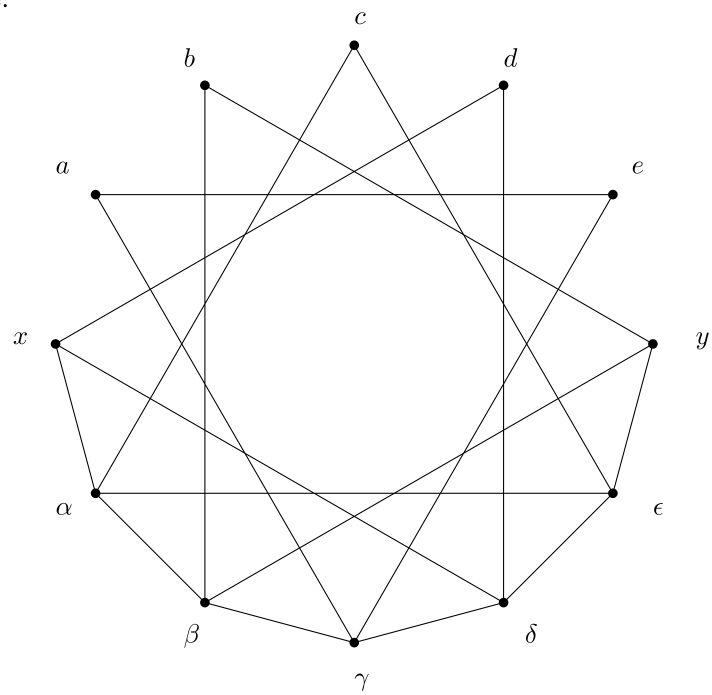
5. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$ différent de ℓ, on a la relation

$$g(x) = \tfrac{1}{2}g(x+1) + \tfrac{1}{2}g(1) + 1$$

et en déduire la valeur de $g(1)$ (il sera peut-être nécessaire pour cela de calculer $g(x)$ pour tout $x \in \{1, \ldots, \ell\}$).

6. D'après ce qui précède, mais sans chercher une justification rigoureuse, quel semble être l'ordre de grandeur, lorsque l'on tire un grand nombre n de fois à pile ou face, de la taille de la plus longue série consécutive de résultats identiques ?

Exercice 5. On considère, sur le graphe représenté ci-dessous, une marcheuse au hasard qui, à chaque pas, va vers un sommet choisi uniformément parmi tous les voisins du sommet où elle se trouve.



1. Déterminer les états transients, les états récurrents et les classes d'irréductibilité de la chaîne de Markov que notre marcheuse incarne.

2. Déterminer, avec aussi peu de calculs que possible, et si possible sans aucun calcul, toutes les mesures de probabilité invariantes de cette chaîne de Markov.

3. Partant du sommet x, quel est le temps moyen que met la marcheuse pour revenir au sommet x ?

4. Entre deux visites au sommet a, combien de fois la marcheuse visite-t-elle, en moyenne, le sommet α ?

Fin du sujet

Le corrigé qui suit est beaucoup plus détaillé que ce qui était attendu lors de l'examen. Il est conçu pour vous permettre de travailler à partir du sujet autant que pour permettre de vérifier la justesse de vos raisonnements.

Correction de l'exercice 1. Sur un ensemble fini, une tribu est toujours engendrée par une partition, et deux tribus sont égales si et seulement si elles sont engendrées par la même partition. Le nombre de tribus sur Ω est donc égal au nombre de partitions sur Ω, qu'on peut compter en en faisant la liste : il y en a 15.

Plus précisément (mais ces explications n'étaient pas attendues), étant donné une tribu $\mathscr{A}$ sur un ensemble fini Ω, on peut définir la relation $\sim$ sur Ω comme suit :

$$\forall x, y \in \Omega, x \sim y \Leftrightarrow (\forall A \in \mathscr{A}, x \in A \Rightarrow y \in A).$$

On vérifie que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence, et que la classe de $x \in \Omega$ est l'intersection de tous les éléments de $\mathscr{A}$ qui contiennent x. Les classes d'équivalence de la relation $\sim$ appartiennent à $\mathscr{A}$, et tout élément de $\mathscr{A}$ est une réunion de classes d'équivalence de $\sim$. Ainsi, $\mathscr{A}$ est la tribu engendrée par les classes d'équivalence de $\sim$.

Le nombre de tribus sur un ensemble fini est donc le nombre de partitions de cet ensemble. La liste des partitions de $\Omega = \{a, b, c, d\}$ est la suivante :

$$\begin{array}{lllll}
\{\{a,b,c,d\}\} & \{\{a,b,c\},\{d\}\} & \{\{a,b\},\{c,d\}\} & \{\{a,b\},\{c\},\{d\}\} & \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\} \\
 & \{\{a,b,d\},\{c\}\} & & \{\{c,d\},\{a\},\{b\}\} & \\
 & \{\{a,c,d\},\{b\}\} & \{\{a,c\},\{b,d\}\} & \{\{a,c\},\{b\},\{d\}\} & \\
 & \{\{b,c,d\},\{a\}\} & & \{\{b,d\},\{a\},\{c\}\} & \\
 & & \{\{a,d\},\{b,c\}\} & \{\{a,d\},\{b\},\{c\}\} & \\
 & & & \{\{b,c\},\{a\},\{d\}\} &
\end{array}$$

Il y en a 15, il y a donc 15 tribus différentes sur Ω.

La tribu engendrée par une partition en n blocs a 2^n éléments. Il y a donc autant de tribus à 4 éléments que de partitions en 2 blocs. Ces partitions apparaissent dans les deuxième et troisième colonne de la liste ci-dessus, il y en en 7 au total. Une tribu ne peut pas avoir 9 éléments car 9 n'est pas une puissance de 2. Enfin, il y a autant de tribus à 16 éléments que de partitions en 4 blocs, c'est-à-dire 1.

Finalement, il existe sur Ω, au total, 15 tribus, dont

- 1 tribu à 2 élements
- 7 tribus à 4 éléments
- 6 tribus à 8 éléments
- 1 tribu à 16 éléments

et aucune tribu à 9 éléments.

2. L'assertion (i) est vraie, car $\varnothing$ et Ω appartiennent, par exemple, à $\mathscr{F}_0$, donc en particulier à $\mathscr{C}$.

L'assertion (ii) est vraie. En effet, soients A et B des éléments de $\mathscr{C}$. Par définition de $\mathscr{C}$, il existe des entiers n et m tels que $A \in \mathscr{F}_n$ et $B \in \mathscr{F}_m$. Quitte à échanger A et B, on peut supposer $n \geqslant m$, et comme $\mathscr{F}_m \subset \mathscr{F}_n$, on a aussi $B \in \mathscr{F}_n$. Comme $\mathscr{F}_n$ est une tribu, $A \cap B$ appartient encore à $\mathscr{F}_n$, donc à $\mathscr{C}$.

L'assertion (iii) est fausse. Par exemple, prenons pour $(\mathscr{F}_n)$ la tribu sur $[0,1[$ engendrée par la partition dyadique d'ordre n de $[0,1[$, c'est-à-dire

$$\mathscr{F}_n = \sigma\Big(\big\{[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}[\,:\, \ell \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}\big\}\Big).$$

Alors en posant $x_0 = 0$ et, pour tout $k \geqslant 1$,

$$x_k = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4^2} + \ldots + \tfrac{1}{4^k} = \tfrac{4^k - 1}{3\,.\,4^k},$$

puis pour tout $k \geqslant 0$

$$A_k = [x_k, x_{k+1}[\,,$$

on a $A_k \in \mathscr{F}_{2k+2}$ donc $A_k \in \mathscr{C}$ pour tout $k \geqslant 0$, mais l'union $\bigcup_{k \geqslant 0} A_k = [0, \frac{1}{3}[$ est un intervalle dont l'une des extérmités n'est pas un nombre dyadique, et n'appartient donc pas à $\mathscr{C}$.

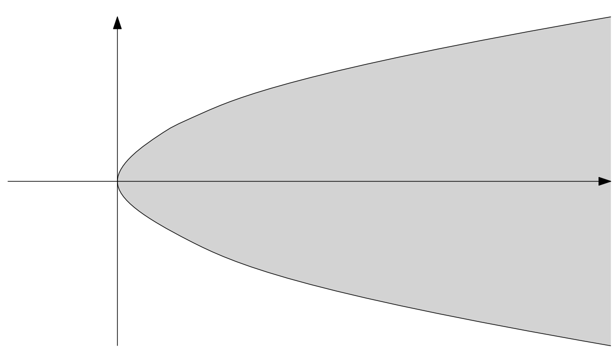
Donnons un autre exemple. Considérons sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant 0$, la tribu

$$\mathscr{F}_n = \{A \subset \mathbb{N} : A \cap [n, +\infty[= \varnothing \text{ ou } A \cap [n, +\infty[= [n, +\infty[\,\}.$$

Alors pour tout $k \geqslant 0$, le singleton $A_k = \{2k\}$ appartient à $\mathscr{F}_{2k+1}$ donc à $\mathscr{C}$, mais la réunion de tous ces singletons, qui est l'ensemble $\bigcup_{k \geqslant 0} A_k = \{0, 2, 4, \ldots\}$ de tous les entiers pairs, n'appartient pas à $\mathscr{C}$, qui est la classe des parties finies ou cofinies de $\mathbb{N}$.

L'assertion (iv) est fausse : si elle était vraie, l'assertion (iii) serait vraie. Nous venons de donner deux exemples de suites croissantes de tribus dont l'union n'est pas une tribu.

Correction de l'exercice 2. 1. Le domaine D a l'allure du domaine grisé sur la figure suivante :



2. Pour calculer c, on écrit le fait que l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ de la densité de la loi du vecteur (X,Y) vaut 1. Or

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \int_D e^{-x}\,dxdy = \int_0^\infty \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dy\right) e^{-x}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,dx.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on change de variable en posant $x = u^2/2$, si bien que $dx = u\,du$, et on trouve

$$2\sqrt{2}\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{2\pi}\left(\int_{-\infty}^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\,\frac{du}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

L'intégrale entre parenthèses est le deuxième moment de la loi normale standard, c'est-à-dire 1, donc l'intégrale que l'on calcule vaut $\sqrt{2\pi}$. Ainsi,

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

3. Les densités des lois de X et de Y s'obtiennent en intégrant la densité de la loi du vecteur (X,Y) par rapport à y et x respectivement. Ainsi,

$$f_X(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}e^{-x}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

et

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y^2/2}^\infty e^{-x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

On reconnaît au passage que Y suit la loi normale standard.

4. On sait qu'il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{E}[Y|X] = h(X).$$

On sait aussi que si (X',Y') est un vecteur aléatoire qui a la même loi que (X,Y), alors $\mathbb{E}[Y'|X'] = h(X')$. Or les vecteurs aléatoires (X,Y) et $(X,-Y)$ ont même loi, puisque la densité de la loi de (X,Y) est invariante par symétrie par rapport à l'axe horizontal. Ainsi,

$$\mathbb{E}[-Y|X] = h(X).$$

En ajoutant cette égalité et la précédente, on voit que $2h(X) = \mathbb{E}[0|X] = 0$, et on en déduit que

$$\mathbb{E}[Y|X] = 0.$$

Pour calculer l'espérance conditionnelle de X sachant Y, on peut appliquer une formule du cours, et dire que c'est $k(Y)$, où $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$k(y) = \frac{\int_{\mathbb{R}} xf(x,y)\,dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx} = \frac{1}{f_Y(y)}\int_{y^2/2}^\infty xe^{-x}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Une primitive de xe^{-x} est $-(x+1)e^{-x}$ et on en déduit que $k(y) = \frac{y^2}{2} + 1$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[X|Y] = \frac{Y^2}{2} + 1.$$

On se donne maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, si bien que $g(Y)$ est bornée donc intégrable, et on cherche à calculer $\mathbb{E}[g(Y)|X]$. Donnons nous une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée et calculons $\mathbb{E}[g(Y)u(X)]$. Notre but est de mettre cette intégrale sous la forme $\mathbb{E}[l(X)u(X)]$ pour une certaine fonction mesurable $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous pourrons alors affirmer que $\mathbb{E}[g(Y)|X] = l(X)$.

Calculons donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(Y)u(X)] &= \int_{\mathbb{R}^2} g(y)u(x)f(x,y)\, dxdy \\
&= \int_D g(y)u(x)e^{-x}\, \frac{dxdy}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} g(y)\, dy \right) u(x)e^{-x}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\sqrt{2x}} \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} g(y)\, dy \right) u(x)\, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} e^{-x}\, dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\sqrt{2x}} \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} g(y)\, dy \right) u(x)\, f_X(x)\, dx \\
&= \int_0^\infty l(x)u(x),
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$l(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} g(y)\, dy.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[g(Y)|X] = \frac{1}{2\sqrt{2X}} \int_{-\sqrt{2X}}^{\sqrt{2X}} g(y)\, dy.$$

On exprimerait plus simplement ce résultat en disant que la *loi conditionnelle* de Y sachant X est la loi uniforme sur l'intervalle $[-\sqrt{2X}, \sqrt{2X}]$.

Correction de l'exercice 3. Il est utile de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, la chaîne de Markov X a sous $\mathbb{P}_x$ la loi d'une marche aléatoire issue de x et qui effectue à chaque pas un saut qui vaut -1, 0 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$.

1. Pour tout $n \geqslant 0$, l'événement

$$\{T \leqslant n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in \{a,b\}\}$$

appartient à $\mathscr{F}_n$, si bien que T est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Soit N un entier tel que $N > b-a$. Nous démontrer le fait que T est fini $\mathbb{P}_x$-presque sûrement en utilisant le fait que si la chaîne X issue de x fait N sauts successifs de $+1$, c'est-à-dire s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $X_{n+k+1} = X_{n+k}+1$ pour tout $k \in \{0,\ldots,N-1\}$, alors $T \leqslant n+N$. En effet, soit $T \leqslant n$ auquel cas T est en particulier inférieur à $n+N$, soit au temps n la marche n'est pas encore sortie de l'intervalle $]a,b[$ si bien qu'après N sauts de $+1$, elle aura nécessairement franchi la valeur b. Écrivons ceci en symboles. Posons, pour tout $p \geqslant 0$,

$$A_p = \big\{\forall k \in \{0,\ldots,N-1\}, X_{pN+k+1} = X_{pN+k}+1\big\}.$$

Alors $A_p \subset \{T \leqslant (p+1)N\}$ $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, au sens où

$$\mathbb{P}_x\big(\{T \leqslant (p+1)N\}^c \cap A_p\big) = 0.$$

En particulier, $A_p \subset \{T < \infty\}$ $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_x\big(\{T < \infty\}^c \cap A_p\big) = 0.$$

En particulier,

$$\bigcup_{p\geqslant 0} A_p \subset \{T<\infty\} \;\; \mathbb{P}_x\text{-p.s., c'est-à-dire } \; \mathbb{P}_x\Bigg(\{T<\infty\}^c \cap \bigcup_{p\geqslant 0} A_p\Bigg) = 0$$

et nous allons montrer que l'union de la suite d'événements $(A_p)_{p\geqslant 0}$ est de probabilité 1. Ceci découle du fait que pour tout $p \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}(A_p) = \frac{1}{3^N}$, qui est strictement positif et ne dépend pas de p, et que les événements $(A_p : p \geqslant 0)$ sont indépendants. Ainsi,

$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{p\geqslant 0} A_p\Bigg) = 1 - \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{p\geqslant 0} A_p^c\Bigg) = 1 - \lim_{P\to\infty} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{p=0}^{P} A_p^c\Bigg) = 1 - \lim_{P\to\infty}(1-\tfrac{1}{3^N})^{P+1} = 1.$$

Ainsi, le temps d'arrêt T est fini $\mathbb{P}_x$-presque sûrement.

2. Par définition, on a $\mathbb{P}_x$-presque sûrement $X_T \in \{a,b\}$. La question revient donc à déterminer $\mathbb{P}_x(X_T=a) = 1-\mathbb{P}_x(X_T=b)$. Sous $\mathbb{P}_x$, la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire dont les pas sont intégrables et d'espérance nulle : c'est donc une martingale. Pour tout $n \geqslant 0$, on peut appliquer le théorème d'arrêt à la martingale X et au temps d'arrêt borné $T\wedge n$ pour trouver

$$\mathbb{E}_x[X_{T\wedge n}] = \mathbb{E}_x[X_0] = x.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $T \wedge n$ est une suite qui, $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, stationne à la valeur finie T, si bien que la suite $(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ converge $\mathbb{P}_x$-presque sûrement vers X_T. Cette convergence est dominée par $\max(|a|,|b|)$ et le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$x = \mathbb{E}_x[X_T] = a\mathbb{P}_x(X_T=a) + b\mathbb{P}_x(X_T=b),$$

d'où l'on tire
$$\mathbb{P}_x(X_T = a) = \frac{b-x}{b-a} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_x(X_T = b) = \frac{x-a}{b-a}.$$

3. On a, pour tout $n \geqslant 0$,
$$X_{n+1}^2 = (X_n + (X_{n+1} - X_n))^2 = X_n^2 + 2X_n(X_{n+1} - X_n) + (X_{n+1} - X_n)^2,$$
si bien qu'en utilisant le fait que $X_{n+1} - X_n$ est indépendant de $\mathscr{F}_n$ et d'espérance nulle, on trouve
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[X_{n+1}^2|\mathscr{F}_n] &= X_n^2 + 2X_n\mathbb{E}_x[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n] + \mathbb{E}_x[(X_{n+1} - X_n)^2|\mathscr{F}_n] \\
&= X_n^2 + \mathbb{E}_x[(X_{n+1} - X_n)^2] \\
&= X_n^2 + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$
Il s'ensuit que
$$\mathbb{E}_x[X_{n+1}^2 - \tfrac{2}{3}(n+1)|\mathscr{F}_n] = X_n^2 - \tfrac{2}{3}n$$
et que la fonction cherchée est donnée par
$$f(x) = \tfrac{2}{3}x.$$
On reprend maintenant un raisonnement similaire au précédent. Pour tout $n \geqslant 0$, on a
$$\mathbb{E}_x[Q_{T\wedge n}] = \mathbb{E}_x[Q_0] = x^2,$$
ce qui se réécrit
$$\frac{2}{3}\mathbb{E}_x[T \wedge n] = \mathbb{E}_x[X_{T\wedge n}^2] - x^2.$$
Lorsque n tend vers l'infini, le même argument de convergence dominée que précédemment montre que le membre de droite converge vers $\mathbb{E}_x[X_T^2] - x^2$ qu'on peut calculer puisque nous connaissons la loi de X_T, et qui vaut
$$\mathbb{E}_x[X_T^2] - x^2 = a^2\frac{b-x}{b-a} + b^2\frac{x-a}{b-a} - x^2 = -ab + x(a+b) - x^2 = (b-x)(x-a).$$
Quant au membre de gauche, il converge, par convergence monotone, vers $\frac{2}{3}\mathbb{E}_x[T]$. Ainsi, nous obtenons finalement
$$\mathbb{E}_x[T] = \frac{3}{2}(b-x)(x-a).$$

4. Soit $k \geqslant 2$. Puisque la chaîne avance par pas de longueur inférieure à 1, pour aller de 1 à l'entier $k+1$, elle doit passer par l'entier k. Ainsi, $\mathbb{P}_1$-presque sûrement, $T_k \leqslant T_{k+1}$.

Notons $S = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = 0\}$ le premier temps de retour de 0 par la chaîne X. Sur l'événement où S est fini, la suite $(T_k)_{k\geqslant 2}$ stationne à S, plus précisément, $T_k = U$ dès que $k > \max(X_0, X_1, \ldots, X_{U-1})$. Sur l'événement $\{S = \infty\}$ (dont nous savons qu'il est de

$\mathbb{P}_1$-probabilité nulle, mais nous n'avons pas besoin d'utiliser ce fait), la suite T_k tend vers l'infini. On voit donc que

$$\lim_{k\to\infty} T_k = S = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = 0\} \quad \mathbb{P}_1\text{-p.s.}$$

D'après le résultat de la question précédente, nous savons que $\mathbb{E}_1[T_k] = \frac{3(k-1)}{2}$ qui tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini, si bien que

$$\mathbb{E}[S] = \infty.$$

Concluons en montrant que S est fini presque sûrement. En effet,

$$\{S = \infty\} = \bigcap_{k\geqslant 2} \{X_{T_k} = k\},$$

si bien que pour tout $k \geqslant 2$,

$$P_1(S = \infty) \leqslant \mathbb{P}_1(X_{T_k} = k) = \frac{1}{k}$$

d'où l'on déduit que $\mathbb{P}_1(S = \infty) = 0$.

Nous venons de démontrer que la chaîne X est récurrente nulle. En effet, par symétrie, la loi de S est la même sous $\mathbb{P}_{-1}$ que sous $\mathbb{P}_1$, et en conditionnant par rapport au premier pas de la marche,

$$\mathbb{P}_0(S < \infty) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\mathbb{P}_1(S < \infty) + \tfrac{1}{3}\mathbb{P}_{-1}(S < \infty) = 1,$$

si bien que la chaîne est récurrente. De plus,

$$\mathbb{E}_0[S] = 1 + \tfrac{1}{3}\mathbb{E}_1[S] + \tfrac{1}{3}\mathbb{E}_{-1}[S] = \infty.$$

Correction de l'exercice 4. 1. Considérons un entier $n \geqslant 1$ et $i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1\}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\} \cap \{\xi_{n+1} = \xi_n\}) &= \mathbb{P}(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n, \xi_{n+1} = i_n) \\ &= 2^{-n-1} \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n)\mathbb{P}(\xi_{n+1} = \xi_n).\end{aligned}$$

L'événement $\{\xi_{n+1} = \xi_n\}$ est donc indépendant de tout événement qui s'écrit comme union disjointe d'événements de la forme $\{\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\}$, donc de la tribu engendrée par $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

On a utilisé, ici, le fait que si A, B et C sont trois événements, si A est indépendant de B, A est indépendant de C, et si B et C sont disjoints, alors A est indépendant de $B \cup C$, car

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cup C)) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C).\end{aligned}$$

2. Sur l'événement $\{\xi_{n+1} = \xi_n\}$, on a $L_{n+1} = L_n + 1$ et sur l'évenement $\{\xi_{n+1} \neq \xi_n\}$, on a $L_{n+1} = 1$. Ainsi, pour tout fonction mesurable bornée f, on a

$$f(L_{n+1}) = f(L_n + 1)\mathbf{1}_{\{\xi_{n+1}=\xi_n\}} + f(1)\mathbf{1}_{\{\xi_{n+1}\neq\xi_n\}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(L_{n+1})|L_1, \ldots, L_n] &= f(L_n + 1)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\xi_{n+1}=\xi_n\}}|L_1, \ldots, L_n] + f(1)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\xi_{n+1}\neq\xi_n\}}|L_1, \ldots, L_n] \\ &= f(L_n + 1)\mathbb{P}(\xi_{n+1} = \xi_n) + f(1)\mathbb{P}(\xi_{n+1} \neq \xi_n)] \\ &= \tfrac{1}{2}f(L_n + 1) + \tfrac{1}{2}f(1).\end{aligned}$$

3. La loi de L_n est portée par $\{1, \ldots, n\}$. On a $L_1 = 1$. Pour $n = 2$, on a

$$\mathbb{E}[f(L_2)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(L_2)|L_1]] = \mathbb{E}[\tfrac{1}{2}f(L_1 + 1) + \tfrac{1}{2}f(1)] = \tfrac{1}{2}f(2) + \tfrac{1}{2}f(1).$$

Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(L_3)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(L_3)|L_1, L_2]] \\ &= \mathbb{E}[\tfrac{1}{2}f(L_2 + 1) + \tfrac{1}{2}f(2)] \\ &= \tfrac{1}{4}f(3) + \tfrac{1}{4}f(2) + \tfrac{1}{2}f(1).\end{aligned}$$

On peut mettre dans un tableau les probabilités $\mathbb{P}(L_n = k)$, ici pour $n \leqslant 5$:

	1	2	3	4	5
L_1	1				
L_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
L_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
L_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
L_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

et faire la conjecture que

$$\mathbb{P}(L_n = k) = 2^{-\min(k,n-1)}.$$

La relation démontrée à la question précédente montre que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(L_n = 1) = \frac{1}{2}$ et que pour tous $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$, on a

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(L_{n-1} = k - 1).$$

On vérifie sans peine que l'expression donnée ci-dessus de $\mathbb{P}(L_n = k)$ est l'unique solution de ces équations.

4. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(i, j) = \mathbb{P}(L_{n+1} = j|L_n = i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = i + 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De l'entier i, on saute avec probabilité $\frac{1}{2}$ à $i+1$ ou à 1.

5. Notons $E = \mathbb{N}^*$ l'espace d'états de notre chaîne de Markov et notons, sur l'espace canonique $E^{\mathbb{N}^*}$,

$$\widehat{T} = \inf\{n \geqslant 1 : \widehat{X}_n = \ell\},$$

où on a noté $(\widehat{X}_n)_{n\geqslant 1}$ le processus canonique. Attention, le temps commence ici à 1 alors que dans le cours il commençait à 0. On a donc

$$L_n = \widehat{X}_n(L) \text{ et } T = \widehat{T}(L).$$

En regardant ce qui se passe au premier pas de la marche, on voit que, pourvu que $x \neq \ell$,

$$\widehat{T} = 1 + \widehat{T} \circ \theta_1.$$

Appliquons la propriété de Markov au temps 1 : on a

$$\begin{aligned} g(x) = \mathbb{E}_x[T] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\widehat{T}(L)|\mathscr{F}_1]] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[1 + \widehat{T}(\theta_1(L))|\mathscr{F}_1]] \\ &= 1 + \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{L_2}[\widehat{T}(L)]] \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_1[\widehat{T}(L)] + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_{x+1}[\widehat{T}(L)] \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}g(x+1) + \tfrac{1}{2}g(1), \end{aligned}$$

ce qui est la relation cherchée.

On a bien entendu $g(\ell) = 1$, puisque $\mathbb{P}_\ell$-presque sûrement, $T = 1$.

En appliquant la relation à $x = 1$, on trouve

$$g(1) = g(2) + 2.$$

En l'appliquant en $x = 2$ et en utilisant la relation entre $g(1)$ et $g(2)$, on trouve

$$g(2) = g(3) + 4.$$

Au cran suivant, on trouve

$$g(3) = g(4) + 8.$$

On devine que $g(x) = g(x+1) + 2^x$ pour tout $x < \ell$, si bien que pour tout $x \in \{1, \ldots, \ell-1\}$,

$$g(x) = 2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{\ell-1} + 1 = 2^\ell - 2^x + 1.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[T] = g(1) = 2^\ell - 1.$$

6. Nous venons de démontrer que lorsqu'on tire à pile ou face, il faut attendre en moyenne le $(2^\ell - 1)$-ième tirage pour voir apparaître une suite consécutive de ℓ tirages identiques, ℓ piles ou ℓ faces.

En inversant la relation entre le nombre de tirages $n = 2^\ell - 1$ et la longueur maximale ℓ d'une série de tirages consécutifs identiques, on a

$$\ell = \log_2(n+1) \simeq \log_2 n.$$

Ainsi, on s'attend à ce que l'ordre de grandeur de la longueur de la plus grande série de tirages identiques consécutifs parmi n tirages à pile où face soit $\log_2 n$.

Correction de l'exercice 5. 1. Le graphe représenté est connexe : il est possible d'aller de tout point à tout autre point. La marche au hasard sur ce graphe a donc une probabilité positive, partant de n'importe quel sommet, de visiter n'importe quel autre sommet donné. La chaîne de Markov est donc irréductible.

Dans une chaîne de Markov irréductible, tous les états sont de même nature : tous récurrents, ou tous transients. Par ailleurs, une chaîne de Markov sur un espace d'états fini admet au moins un état récurrent.

Tous les états de la chaîne considérée sont donc récurrents.

2. On sait que pour la marche au hasard sur un graphe, la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible, et en particulier invariante. Cette mesure, que nous notons κ, est donc donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
&\kappa(a) = \kappa(b) = \kappa(c) = \kappa(d) = \kappa(e) = 2,\\
&\kappa(x) = \kappa(y) = 3,\\
&\kappa(\alpha) = \kappa(\beta) = \kappa(\gamma) = \kappa(\delta) = \kappa(\epsilon) = 4.
\end{aligned}$$

La chaîne étant irréductible et récurrente, deux mesures invariantes quelconques sont proportionnelles. Il existe donc une unique probabilité invariante, notée π, et obtenue en normalisant κ, dont la masse totale est 36 :

$$\begin{aligned}
&\pi(a) = \pi(b) = \pi(c) = \pi(d) = \pi(e) = \tfrac{1}{18},\\
&\pi(x) = \pi(y) = \tfrac{1}{12},\\
&\pi(\alpha) = \pi(\beta) = \pi(\gamma) = \pi(\delta) = \pi(\epsilon) = \tfrac{1}{9}.
\end{aligned}$$

3. L'espérance du temps de retour T_x au sommet x partant de x est donné par l'inverse de la masse de x pour la probabilité invariante :

$$\mathbb{E}_x[T_x] = \frac{1}{\pi(x)} = 12.$$

4. La mesure μ qui à un sommet z du graphe associe

$$\mu(z) = \mathbb{E}_a\left[\sum_{i=0}^{T_a-1} \mathbf{1}_{\{X_i=z\}}\right]$$

est une (donc l'unique) mesure invariante telle que $\mu(a) = 1$. Ainsi, $\mu = \frac{1}{2}\kappa$.

Or le nombre moyen de visites en α entre deux visites en a vaut exactement

$$\mu(\alpha) = \tfrac{1}{2}\kappa(\alpha) = 2.$$

Entre deux visites en a, la marcheuse visite en moyenne deux fois le sommet α.

Fin du corrigé