Sorbonne Université — 2019 – 2020
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 9 juin 2020

Examen – Deuxième session

∗ *Vous avez jusqu'à 13h00 pour composer et rendre votre copie, ou jusqu'à 14h20 si vous disposez d'un tiers temps.*

∗ *Pour rendre votre copie, vous devrez la scanner ou la photographier, puis choisir une des options ci-dessous :*

- *m'envoyer le fichier par mail à* `thierry.levy@sorbonne-universite.fr`
- *me l'envoyer par Smash :* `https://fromsmash.com/`
- *me l'envoyer par WeTransfer :* `https://wetransfer.com/`

Si aucune de ces options ne fonctionne et que vous en voyez une autre, vous pouvez bien sûr l'utiliser, vous pouvez par exemple m'envoyer votre copie par Moodle si vous savez comment faire.

∗ *Après avoir rendu votre copie, merci de répondre au mail par lequel je vous ai envoyé le sujet, pour me dire que vous avez rendu votre copie, pour me dire quand, et comment.*

Le sujet comporte cinq exercices, dont les énoncés se trouvent sur cette page et les trois qui suivent. Il n'est pas nécessaire de résoudre complètement les cinq exercices pour obtenir une note honorable.

Exercice 1. 1. Déterminer le nombre de tribus qui existent sur l'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Parmi ces tribus, combien ont 4 éléments ? 9 éléments ? 16 éléments ?

2. Sur un ensemble Ω quelconque, on se donne une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire une suite croissante de tribus. On pose $\mathscr{C} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathscr{F}_n$. Parmi les assertions suivantes, indiquer lesquelles sont nécessairement vraies et en donner une démonstration.

(i) $\varnothing \in \mathscr{C}$ et $\Omega \in \mathscr{C}$

(ii) Pour tous $A, B \in \mathscr{C}$, on a $A \cap B \in \mathscr{C}$

(iii) Pour toute suite $(A_k)_{k\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{C}$, on a $\bigcup_{k\geqslant 0} A_k \in \mathscr{C}$

(iv) $\mathscr{C}$ est une tribu

Exercice 2. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \geqslant y^2\}$. On considère un vecteur aléatoire (X, Y) dont la loi admet par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ la densité

$$f(x, y) = c\, e^{-x} \mathbf{1}_D(x, y),$$

où c est un réel.

1. Dessiner le domaine D.
2. Calculer c.
3. Déterminer les densités des lois de X et de Y.
4. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[Y|X]$, $E[X|Y]$ et $\mathbb{E}[g(Y)|X]$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée arbitraire.

Exercice 3. On considère sur $\mathbb{Z}$ le noyau de transition P donné, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, par

$$P(x, y) = \tfrac{1}{3} \text{ si } |x - y| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad P(x, y) = 0 \text{ sinon.}$$

On se donne une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, X = (X_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{Z}})$ sur $\mathbb{Z}$ de noyau de transition P. On pourra utiliser sans le démontrer le fait que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, sous $\mathbb{P}_x$, les variables aléatoires $(X_{n+1} - X_n)_{n\geqslant 0}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.

On se donne $a < x < b$ trois entiers relatifs et on définit

$$T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = a \text{ ou } X_n = b\}.$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et qu'il est fini $\mathbb{P}_x$-presque sûrement.
2. Déterminer la loi de X_T sous $\mathbb{P}_x$.
3. Déterminer une fonction simple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que le processus $(X_n^2 - f(n))_{n\geqslant 0}$ soit une martingale sous $\mathbb{P}_x$ relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $Q_n = X_n^2 - f(n)$.

En étudiant le processus arrêté $Q^T = (Q_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$, calculer $\mathbb{E}[T]$.

4. On fixe maintenant $x = 1$ et on pose, pour tout $k \geqslant 2$,

$$T_k = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = k\}.$$

Montrer que $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, la suite $(T_k)_{k\geqslant 2}$ est croissante et converge vers une limite que l'on explicitera, et que l'on notera S.

5. Calculer $\mathbb{E}_1[S]$ et $\mathbb{P}_1(S = \infty)$. Que venez-vous de démontrer à propos de la chaîne de Markov X ?

Exercice 4. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on considère un jeu de pile ou face infini, modélisé par une suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de variables indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$. Par convention, on posera $\xi_0 = -1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit

$$L_n = \max\{k \in \{1, \dots, n\} : \xi_n = \xi_{n-1} = \dots = \xi_{n-k+1} \text{ et } \xi_{n-k+1} \neq \xi_{n-k}\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'événement $\{\xi_{n+1} = \xi_n\}$ est indépendant de la tribu $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. (*On pourra utiliser le fait que tout élément de cette tribu est une union disjointe d'événements de la forme* $\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\}$, *avec* $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$.)

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}[f(L_{n+1})|L_1, \dots, L_n] = \tfrac{1}{2} f(1) + \tfrac{1}{2} f(L_n + 1).$$

3. Décrire la loi de L_n pour tout $n \geqslant 1$. (*On pourra commencer par le faire pour les petites valeurs de* n.)

4. Le résultat de la question 2 montre que $(L_n)_{n\geqslant 1}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ (on ne demande pas de préciser ce point). Décrire la matrice de transition, qu'on notera P, de cette chaîne de Markov.

On suppose qu'on a, sur notre espace de probabilités, une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ de matrice de transition P, pour laquelle on conserve la notation $L = (L_n)_{n\geqslant 1}$. Ceci nous permet de parler de la chaîne issue de x pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, et de noter $\mathbb{P}_x$ la probabilité correspondante. Ainsi, la probabilité $\mathbb{P}$ qu'on a utilisée jusqu'à maintenant, et sous laquelle $L_1 = 1$ presque sûrement, est désormais notée $\mathbb{P}_1$.

On fixe désormais un entier $\ell \geqslant 1$. On définit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geqslant 1 : L_n = \ell\}$. On pose, pour tout $x \geqslant 1$,

$$g(x) = \mathbb{E}_x[T].$$

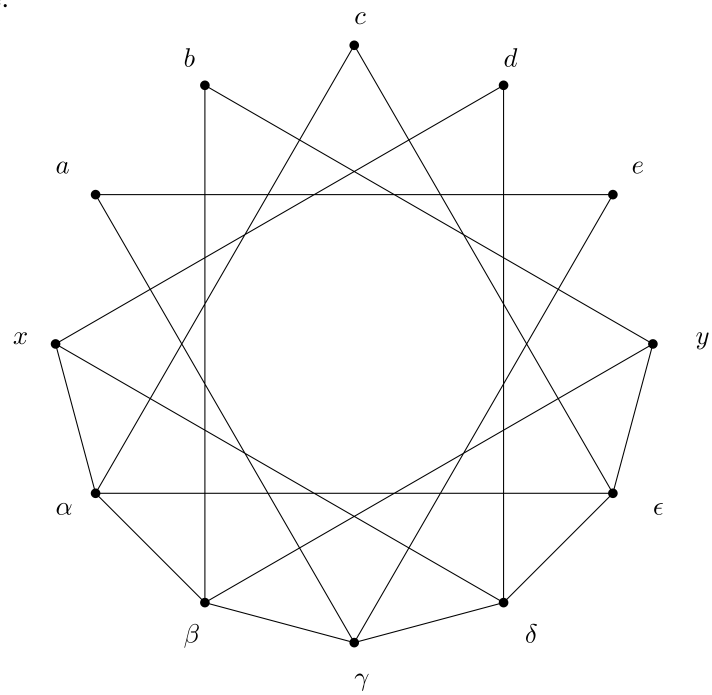
5. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$ différent de ℓ, on a la relation

$$g(x) = \tfrac{1}{2} g(x+1) + \tfrac{1}{2} g(1) + 1$$

et en déduire la valeur de $g(1)$ (il sera peut-être nécessaire pour cela de calculer $g(x)$ pour tout $x \in \{1, \dots, \ell\}$).

6. D'après ce qui précède, mais sans chercher une justification rigoureuse, quel semble être l'ordre de grandeur, lorsque l'on tire un grand nombre n de fois à pile ou face, de la taille de la plus longue série consécutive de résultats identiques ?

Exercice 5. On considère, sur le graphe représenté ci-dessous, une marcheuse au hasard qui, à chaque pas, va vers un sommet choisi uniformément parmi tous les voisins du sommet où elle se trouve.



1. Déterminer les états transients, les états récurrents et les classes d'irréductibilité de la chaîne de Markov que notre marcheuse incarne.

2. Déterminer, avec aussi peu de calculs que possible, et si possible sans aucun calcul, toutes les mesures de probabilité invariantes de cette chaîne de Markov.

3. Partant du sommet x, quel est le temps moyen que met la marcheuse pour revenir au sommet x ?

4. Entre deux visites au sommet a, combien de fois la marcheuse visite-t-elle, en moyenne, le sommet α ?

Fin du sujet