Sorbonne Université — 2019 – 2020
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 7 janvier 2020

Examen

L'épreuve dure trois heures.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.

Exercice 1. Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$, on se donne une sous-martingale positive $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$M_n = \max(X_0, \dots, X_n).$$

1. Soit $n \geqslant 0$ un entier et $a \geqslant 0$ un réel. Démontrer que

$$a\mathbb{P}(M_n \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}\big[X_n \mathbf{1}_{\{M_n \geqslant a\}}\big].$$

(Cette inégalité est un résultat du cours : c'est une *démonstration* qui en est demandée ici.)

2. Pour tout réel $y > 0$, on note $(\log y)^+$ la partie positive du logarithme de y, c'est-à-dire

$$(\log y)^+ = \max(\log y, 0).$$

On pose de plus $(\log 0)^+ = 0$. Dans ce qui suit, e est la base du logarithme népérien.

Montrer que pour tout réel $y > 0$, on a l'inégalité $\log y \leqslant \frac{y}{e}$, puis montrer que pour tous réels $x, y \geqslant 0$, on a

$$x(\log y)^+ \leqslant x(\log x)^+ + \frac{y}{e}.$$

On pourra traiter successivement le cas où $y \leqslant 1$, puis le cas où $y \geqslant 1$ et $x \leqslant 1$, et enfin le cas où x et y sont supérieurs à 1.

3. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on a

$$\mathbb{E}[Z] \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant a)\, da.$$

4. Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$ on a

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant 1 + \mathbb{E}[X_n(\log M_n)^+],$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant \frac{e}{e-1}\big(1 + \mathbb{E}[X_n(\log X_n)^+]\big).$$

5. Que peut-on dire d'une martingale $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\sup\big\{\mathbb{E}\big[|Y_n|(\log|Y_n|)^+\big] : n \geqslant 0\big\} < +\infty\,?$$

On pourra commencer par démontrer, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité $x \leqslant 1 + x(\log x)^+$.

Exercice 2. Donner un énoncé précis et une démonstration du fait suivant : lorsqu'une sur-martingale positive atteint 0, elle y reste.

Exercice 3. 1. On considère sur un ensemble fini ou dénombrable E une chaîne de Markov de noyau de transition P. Parmi les six assertions suivantes, dire lesquelles sont équivalentes à l'assertion : "La chaîne de Markov est irréductible".

(Exceptionnellement, on ne demande dans cette question aucune justification, mais aucune autre réponse que la réponse exacte ne rapportera de points.)

a. Pour tous x et y dans E, on a $P(x, y) > 0$.
b. Pour tous x et y dans E et pour tout $n \geqslant 0$, on a $P^n(x, y) > 0$.
c. Pour tous x et y dans E, il existe $n \geqslant 0$ tel qu'on ait $P^n(x, y) > 0$.
d. Pour tous x et y dans E, il existe $n \geqslant 100$ tel qu'on ait $P^n(x, y) > 0$.
e. Pour tous x et y dans E, on a $\sum_{n \geqslant 0} P^n(x, y) > 0$.
f. Pour tous x et y dans E, on a $\sum_{n \geqslant 0} P^n(x, y) = \infty$.

2. Rappeler les définitions d'une mesure invariante et d'une mesure réversible d'une chaîne de Markov.

3. Montrer qu'une mesure invariante d'une chaîne de Markov irréductible donne une masse strictement positive à chaque élément de l'espace d'états.

4. Montrer que deux mesures réversibles d'une chaîne de Markov irréductible sont proportionnelles.

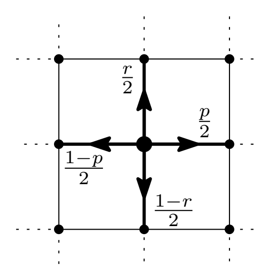
5. Existe-t-il une chaîne de Markov qui admette une mesure invariante, mais aucune mesure réversible ?

(Une réponse positive devra être accompagnée d'un exemple, une réponse négative d'une démonstration.)

6. (Il est conseillé de n'aborder cette question qu'après avoir cherché tout le reste du sujet.)

On se donne deux réels p et r strictement compris entre 0 et 1. On considère sur $\mathbb{Z}^2$ la chaîne de Markov qui, à chaque pas, se déplace vers la droite avec probabilité $p/2$, vers la gauche avec probabilité $(1-p)/2$, vers le haut avec probabilité $r/2$ et vers le bas avec probabilité $(1-r)/2$. Autrement dit, pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$
\begin{aligned}
P((i, j), (i+1, j)) &= p/2 \\
P((i, j), (i-1, j)) &= (1-p)/2 \\
P((i, j), (i, j+1)) &= r/2 \\
P((i, j), (i, j-1)) &= (1-r)/2.
\end{aligned}
$$



Déterminer autant de mesures invariantes que possible pour cette chaîne de Markov. Dire parmi ces mesures invariantes lesquelles sont réversibles.

Pour quelles valeurs de p et de r la chaîne est-elle récurrente ? (On pourra utiliser sans les démontrer les propriétés de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$.)

Exercice 4. On note $W = (W_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$, considérée comme une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^2$ de noyau de transition P donné, pour tous $w, z \in \mathbb{Z}^2$, par

$$P(w,z) = \frac{1}{4} \text{ si } \|z-w\|_2 = 1 \quad \text{et} \quad P(w,z) = 0 \text{ sinon.}$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on note X_n et Y_n les deux composantes de W_n, si bien que $W_n = (X_n, Y_n)$.

On travaille dans tout cet exercice sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0})$ muni d'une famille $(\mathbb{P}_w)_{w\in\mathbb{Z}^2}$ de mesures de probabilités. Vous pouvez, si vous le souhaitez, considérer que cet espace filtré est l'espace canonique de la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^2$ de noyau de transition P. Dans tous les cas, on dispose d'un opérateur de décalage noté θ.

On définit, pour tout entier $\ell \geqslant 0$,

$$T_\ell = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = X_0 + \ell\}.$$

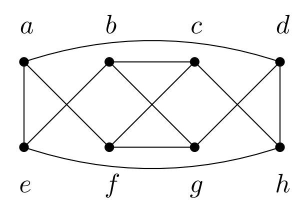
1. Rappeler la définition d'un temps d'arrêt et démontrer que pour tout $\ell \geqslant 0$, la variable aléatoire T_ℓ est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer que T_1 est fini $\mathbb{P}_{(0,0)}$-presque sûrement.

3. Exprimer, sous $\mathbb{P}_{(0,0)}$ et pour tout $\ell \geqslant 1$, le temps T_ℓ en fonction de $T_{\ell-1}$, de T_1 et d'un opérateur de décalage.

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_{T_\ell})_{\ell\geqslant 0}$ est, sous $\mathbb{P}_{(0,0)}$, une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ issue de 0 et dont on déterminera le noyau de transition en fonction de la loi de Y_{T_1}. Il n'est pas demandé de calculer cette loi explicitement.

Exercice 5. On considère la marche au hasard sur le graphe suivant :



qu'on étudie comme une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ? Cette chaîne est-elle apériodique ?

2. Déterminer toutes les mesures invariantes de cette chaîne de Markov.

3. Entre deux visites en a, combien de fois la chaîne passe-t-elle, en moyenne, en b ?

4. Partant de e, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à revenir en e ?

5. Calculer la probabilité, partant d'un sommet arbitraire x, de visiter la partie $\{a, e\}$ avant de visiter la partie $\{d, h\}$. (On pourra étudier cette probabilité comme une fonction de x.)

———— Fin du sujet ————

Correction de l'exercice 1. 1. Un temps d'arrêt relativement à une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ est une variable aléatoire $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'événement $\{T = n\}$ appartienne à $\mathscr{F}_n$.

Pour tout $\ell \geqslant 0$, le temps T_ℓ est le temps d'atteinte, par le processus adapté $(W_n)_{n\geqslant 0}$, de la partie $\{\ell\} \times \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}^2$. C'est donc un temps d'arrêt.

2. La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ est irréductible et récurrente. Ainsi, partant de n'importe quel état, on visite (et on visite une infinité de fois) n'importe quel autre avec probabilité 1. En particulier, partant de $(0,0)$, on visite par exemple $(1,0)$, si bien que T_1 est fini.

3. Soit $\ell \geqslant 1$. Partant de $(0,0)$, pour atteindre $\{\ell\} \times \mathbb{Z}$, on doit d'abord atteindre $\{\ell-1\} \times \mathbb{Z}$, puis, partant de là, atteindre $\{\ell\} \times \mathbb{Z}$, c'est-à-dire atteindre la droite verticale située immédiatement à droite du point d'où on part. Ceci prend, à partir de ce point, un temps T_1. Plus précisément, en notant θ l'opérateur de décalage, on a la relation

$$T_\ell = T_{\ell-1} + T_1 \circ \theta_{T_{\ell-1}}.$$

4. Notons ν la loi de Y_{T_1} sous $\mathbb{P}_{(0,0)}$. C'est une mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}$. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tous $y_0, \ldots, y_n$, on a

$$\mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_0} = y_0, \ldots, Y_{T_n} = y_n) = \delta_{y_0,0}\nu(y_1 - y_0)\ldots\nu(y_n - y_{n-1}).$$

Pour $n = 0$, c'est une conséquence immédiate du fait que $T_0 = 0$ presque sûrement sous $\mathbb{P}_{(0,0)}$. Supposons maintenant la propriété montrée au rang $n-1$ et montrons-la au rang n. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_0} = y_0, \ldots, Y_{T_n} = y_n) &= \mathbb{E}_{(0,0)}[\mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_0} = y_0, \ldots, Y_{T_n} = y_n | \mathscr{F}_{T_{n-1}})] \\ &= \mathbb{E}_{(0,0)}[\mathbf{1}_{\{Y_{T_0}=y_0,\ldots,Y_{T_{n-1}}=y_{n-1}\}}\mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_n} = y_n | \mathscr{F}_{T_{n-1}})]\end{aligned}$$

Calculons la probabilité conditionnelle en utilisant la propriété de Markov forte. Elle vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_n} = y_n | \mathscr{F}_{T_{n-1}}) &= \mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_{n-1}+T_1\circ\theta_{T_{n-1}}} = y_n | \mathscr{F}_{T_{n-1}}) \\ &= \mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_1} \circ \theta_{T_{n-1}} = y_n | \mathscr{F}_{T_{n-1}}) \\ &= \mathbb{P}_{(X_{T_{n-1}}, Y_{T_{n-1}})}(Y_{T_1} = y_n) \\ &= \mathbb{P}_{(n-1, Y_{T_{n-1}})}(Y_{T_1} = y_n).\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que nous calculions vaut

$$\mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_0} = y_0, \ldots, Y_{T_n} = y_n) = \mathbb{E}_{(0,0)}[\mathbf{1}_{\{Y_{T_0}=y_0,\ldots,Y_{T_{n-1}}=y_{n-1}\}}\mathbb{P}_{(n-1,y_{n-1})}(Y_{T_1} = y_n)].$$

Le noyau de transition est invariant par translation, aussi

$$\mathbb{P}_{(n-1,y_{n-1})}(Y_{T_1} = y_n) = \mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_1} = y_n - y_{n-1}) = \nu(y_n - y_{n-1}).$$

Finalement, $(Y_{T_\ell})_{\ell\geqslant 0}$ est sous $\mathbb{P}_{(0,0)}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ issue de 0 dont le noyau de transition est donné par

$$p(r,s) = \nu(s-r) = \mathbb{P}_{(0,0)}(Y_{T_1} = s - r).$$

Correction de l'exercice 2. 1. Notons $T = \inf\{k \geqslant 0 : X_k \geqslant a\}$. On a

$$a\mathbb{P}(M_n \geqslant a) = a\mathbb{P}(T \leqslant n) \leqslant \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T\leqslant n\}}] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}}].$$

Or, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a, puisque X est une sous-martingale et T un temps d'arrêt,

$$\mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}}] \leqslant \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_k]\mathbf{1}_{\{T=k\}}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{T=k\}}|\mathscr{F}_k]\big] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{T=k\}}].$$

Finalement,

$$a\mathbb{P}(M_n \geqslant a) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{T=k\}}] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{T\leqslant n\}}] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{M_n\geqslant a\}}].$$

2. La fonction $y \mapsto \frac{y}{e}$ a au point $y = e$ la même valeur, en l'occurrence 1, et la même dérivée, en l'occurrence $\frac{1}{e}$, que la fonction $y \mapsto \log y$. La graphe de la fonction $y \mapsto \frac{y}{e}$ est donc la droite tangente au point $(e, 1)$ au graphe de la fonction $y \mapsto \log y$. L'inégalité en découle, par concavité de la fonction logarithme.

On aurait aussi pu établir l'inégalité en étudiant la fonction $y \mapsto \log y - \frac{y}{e}$.

Montrons maintenant la deuxième inégalité. Si $y \leqslant 1$, le membre de gauche de l'inégalité à démontrer est nul, elle est donc vraie. Supposons maintenant $y \geqslant 1$. Si $x \leqslant 1$, l'inégalité à montrer est $x \log y \leqslant \frac{y}{e}$. Or nous avons $x \log y \leqslant \log y$ et, d'après la deuxième inégalité, $\log y \leqslant \frac{y}{e}$. L'inégalité est donc prouvée. Reste à étudier le cas où $x \geqslant 1$. Alors l'inégalité à démontrer est équivalente à $\log \frac{y}{x} \leqslant \frac{\frac{y}{x}}{e}$, dont nous savons qu'elle est vraie.

3. On écrit

$$\mathbb{E}[Z] = \int_\Omega Z \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{a\leqslant Z(\omega)\}} \, da \, d\mathbb{P}(\omega)$$

et on applique le théorème de Fubini pour échanger les intégrales, et obtenir

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mathbf{1}_{\{a\leqslant Z(\omega)\}} d\mathbb{P}(\omega) \, da = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant a) \, da.$$

L'intégrale de 0 à 1 est inférieure ou égale à 1, si bien que

$$\mathbb{E}[Z] \leqslant 1 + \int_1^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant a) \, da.$$

4. On applique le résultat de la question précédente à M_n et on trouve

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{a} \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{M_n\geqslant a\}}] \, da = 1 + \mathbb{E}\Big[X_n \int_1^{\infty} \mathbf{1}_{\{M_n\geqslant a\}} \, \frac{da}{a}\Big].$$

L'intégrale vaut 0 si $M_n \leqslant 1$, et vaut sinon $\int_1^{M_n} \frac{da}{a} = \log M_n$. Ainsi, elle vaut toujours $(\log M_n)^+$, et l'inégalité est démontrée.

En appliquant la troisième inégalité de la question 2, on trouve

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant 1 + \mathbb{E}[X_n(\log X_n)^+] + \frac{1}{e}\mathbb{E}[M_n],$$

d'où l'inégalité cherchée découle immédiatement.

5. Montrons l'inégalité $x \leqslant 1 + x(\log x)^+$. Si $x \leqslant 1$, l'inégalité à démontrer est exactement $x \leqslant 1$, qui est vraie. La fonction $x \mapsto 1 + x(\log x)^+$ vaut 1 en 1 et sa dérivée, en tout $x \geqslant 1$, vaut $1 + \log x$. Elle est donc supérieure, sur l'intervalle $[1, +\infty[$, à la fonction $x \mapsto x$.

Grâce à cette inégalité, on déduit de l'hypothèse que la martingale Y est bornée dans L^1. La suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc presque sûrement vers une variable aléatoire Y_∞ intégrable.

Notons

$$C = \sup\big\{\mathbb{E}\big[|Y_n|(\log|Y_n|)^+\big] : n \geqslant 0\big\}.$$

On applique maintenant ce qui précède à la sous-martingale $(|Y_n|)_{n\geqslant 0}$ et on obtient que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[\max(|Y_0|, \ldots, |Y_n|)] \leqslant C.$$

Par convergence monotone, on en déduit que

$$\mathbb{E}[\sup\{|Y_n| : n \geqslant 0\}] \leqslant C.$$

Il s'ensuite que la variable aléatoire $\sup\{|Y_n| : n \geqslant 0\}$ est intégrable et domine la convergence presque sûre de la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ ver s Y_∞. Par le théorème de convergence dominée, cette convergence a donc lieu dans L^1.

On aurait aussi pu démontrer que l'hypothèse faite sur Y entraîne l'uniforme intégrabilité de la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$, et donc que la convergence de la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ vers Y_∞ a lieu dans L^1.

Correction de l'exercice 3. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on se donne une sur-martingale positive $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Notons

$$T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 0\}.$$

Nous allons montrer (c'est l'énoncé précis de l'assertion donnée dans l'énoncé) que pour tout $n \geqslant 0$,

$$X_n \mathbf{1}_{\{T\leqslant n\}} = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Fixons $n \geqslant 0$. Puisque la variable aléatoire $X_n \mathbf{1}_{\{T\leqslant n\}}$ est positive, il suffit, pour montrer qu'elle est nulle $\mathbb{P}$-presque sûrement, de montrer que son espérance est nulle. Calculons donc son espérance. En utilisant successivement le fait que l'espérance d'une variable aléatoire positive est positive ; puis le fait que l'événement $\{T \leqslant n\}$ est l'union disjointe des événements $\{T = k\}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$; puis le fait que l'espérance d'une variable aléatoire est la même que celle de n'importe laquelle de ses espérances conditionnelles ; puis le fait que T est un temps d'arrêt ; puis le fait que X est une sur-martingale ; et enfin le fait que pour tout $k \geqslant 0$, par définion de T, la variable aléatoire X_k est nulle sur l'événement $\{T = k\}$, on trouve

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{T \leqslant n\}}] &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{T=k\}}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{T=k\}} | \mathscr{F}_k]] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathscr{F}_k] \mathbf{1}_{\{T=k\}}] \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}}] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ceci nous montre en effet que l'espérance de $X_n \mathbf{1}_{\{T \leqslant n\}}$ est nulle.

Correction de l'exercice 4. 1. Les assertions équivalentes à l'irréductibilité de la chaîne sont les assertions c, d, et e. Les assertions a, b et f sont toutes trois strictement plus fortes que l'irréductibilité de la chaîne. Par exemple, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^3$ est irréductible mais ne satisfait aucune des assertions a, b, f.

L'assertion e est la définition de l'irréductibilité et l'assertion c lui est équivalente. L'assertion d entraîne l'assertion c. Le fait que l'assertion d soit vérifiée par toute chaîne irréductible est le seul point qui ne soit pas une conséquence immédiate de la définition. Démontrons-le (ce n'était pas demandé).

Soient x, y des éléments de E, que nous supposons pour l'instant distincts. Par irréductibilité, il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que $P^a(x, y) > 0$ et $P^b(y, x) > 0$. De ceci découle que $P^{a+b}(y, y) \geqslant P^b(y, x)P^a(x, y) > 0$. Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$
P^{a+k(a+b)}(x, y) \geqslant P^a(x, y)(P^{a+b}(y, y))^k > 0
$$

si bien qu'il existe des entiers n arbitrairement grands tels que $P^n(x, y) > 0$. Examinons maintenant le cas où $y = x$. Si E est réduit au singleton $\{x\}$, on a $P^n(x, x) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$ et la propriété est vraie. Sinon, il existe $z \in E$ distinct de x. Alors, par irréductibilité, il existe $a > 0$ tel que $P^a(x, z) > 0$ et $b > 0$ tel que $P^b(z, x) > 0$. Pour tout $k \geqslant 1$, on a $P^{k(a+b)}(x, x) \geqslant (P^a(x, z)P^b(z, x))^k > 0$. Le résultat est montré.

2. Une mesure invariante d'une chaîne de Markov sur E de noyau de transition P est une mesure μ sur E telle que

i. il existe $x \in E$ tel que $\mu(x) > 0$,

ii. pour tout $x \in E$, on ait $\mu(x) < \infty$,

iii. pour tout $y \in E$, on ait $\sum_{x\in E} \mu(x)P(x,y) = \mu(y)$.

Une mesure réversible d'une chaîne de Markov sur E de noyau de transition P est une mesure μ sur E telle que

i. il existe $x \in E$ tel que $\mu(x) > 0$,

ii. pour tout $x \in E$, on ait $\mu(x) < \infty$,

iii. pour tous $x, y \in E$, on ait $\mu(x)P(x,y) = \mu(y)P(y,x)$.

3. Sur E muni du noyau de transition P irréductible, soit μ une mesure invariante. Soit $x \in E$ un élément tel que $\mu(x) > 0$. Soit y un élément de E. Par irréductibilité, il existe, et nous choisissons, un entier $a \geqslant 0$ tel que $P^a(x,y) > 0$. Alors

$$\mu(y) = \sum_{z\in E} \mu(z)P^a(z,y) \geqslant \mu(x)P^a(x,y) > 0.$$

4. Toujours sur E muni du noyau irréductible P, soient μ et ν deux mesures réversibles. Ce sont en particulier des mesures invariantes, donc elles donnent une masse strictement positive à chaque élément de E.

Pour tous x, y dans E tels que $P(x,y) > 0$, on a

$$\mu(x)P(x,y) = \mu(y)P(y,x)$$

d'où nous déduisons que

$$\frac{\mu(x)}{\mu(y)} = \frac{P(y,x)}{P(x,y)}.$$

Le même raisonnement appliqué à ν nous permet d'affirmer que

$$\frac{\mu(x)}{\mu(y)} = \frac{\nu(x)}{\nu(y)},$$

c'est-à-dire que

$$\frac{\mu(x)}{\nu(x)} = \frac{\mu(y)}{\nu(y)}.$$

Soient maintenant x et y deux éléments distincts quelconques de E. Par irréductibilité, il existe $a > 0$ tel que $P^a(x,y) > 0$. Il existe donc une suite $x = x_0, x_1, \ldots, x_a = y$ d'éléments de E telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, a-1\}$, on ait $P(x_i, x_{i+1}) > 0$. En appliquant ce qui précède a fois, on trouve

$$\frac{\mu(x)}{\nu(x)} = \frac{\mu(x_0)}{\nu(x_0)} = \frac{\mu(x_1)}{\nu(x_1)} = \ldots = \frac{\mu(x_a)}{\nu(x_a)} = \frac{\mu(y)}{\nu(y)}.$$

Les mesures μ et ν sont donc proportionnelles.

5. Sur l'espace $E = \{a, b, c\}$, considérons la chaîne de Markov de noyau de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette chaîne est irréductible, récurrente parce que E est fini. Elle admet donc, à une constante multiplicative près, une unique mesure invariante, qui est la mesure de comptage $\mu = (1, 1, 1)$. Mais cette mesure n'est pas réversible, car par exemple

$$1 = \mu(a)P(a, b) \neq \mu(b)P(b, a) = 0.$$

Nous avons donc un exemple d'une chaîne de Markov qui admet une mesure invariante, mais aucune mesure réversible.

6. Pour tous réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$ non tous nuls, la mesure

$$\mu((i, j)) = \alpha + \beta \left(\frac{p}{1-p}\right)^i + \gamma \left(\frac{r}{1-r}\right)^j + \delta \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \left(\frac{r}{1-r}\right)^j$$

est une mesure invariante. Cette mesure est réversible si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Lorsque $p = r = \frac{1}{2}$, on a la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$, dont on sait qu'elle est récurrente. Dans tous les autres cas, on a une marche aléatoire dont les pas ne sont pas centrés, et la loi forte des grands nombres entraîne que la chaîne est transiente.

Correction de l'exercice 5. 1. Puisque le graphe sur lequel on fait une marche au hasard est connexe, chaque état mène à chaque autre pour cette chaîne de Markov, qui est donc irréductible. Puisque l'espace d'états est fini, la chaîne a au moins un état récurrent, et puisque la chaîne est irréductible, tous les états sont récurrents.

On peut aller de a à a par le chemin $a \to d \to g \to f \to a$ de longueur 4 et par le chemin $a \to d \to h \to e \to a$ de longueur 3. Ainsi, la période de a divise le pgcd de 3 et 4 : c'est donc 1. Tous les élements sont donc de période 1, et la chaîne est apériodique.

2. La mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible, donc invariante pour la marche au hasard. Dans le graphe que nous considérons, chaque sommet a trois voisins. Ainsi, la mesure qui à chaque sommet associe la masse 3 est invariante.

Puisque la chaîne est irréductible et récurrente, elle admet, à une constante multiplicative près, une unique mesure invariante. Les mesures invariantes sont exactement les mesures

$$\alpha(\delta_a + \delta_b + \delta_c + \delta_d + \delta_e + \delta_f + \delta_g + \delta_h), \quad \alpha > 0.$$

3. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche au hasard sur le graphe. La mesure μ donnée par

$$\mu(x) = \mathbb{E}_a \left[\sum_{i=0}^{T_t - 1} \mathbf{1}_{\{X_i = x\}} \right]$$

est une mesure invariante, et elle vérifie $\mu(a) = 1$. C'est donc la mesure de comptage sur l'espace d'états $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. L'égalité

$$\mu(b) = 1$$

signifie qu'entre deux visites en a, la chaîne passe, en moyenne, une fois en b.

4. Le temps moyen de retour en e est égal à l'inverse de la masse que donne à e l'unique mesure de probabilité invariante, que nous noterons π. Cette probabilité donne la masse $\frac{1}{8}$ à chaque sommet du graphe. Ainsi,

$$\mathbb{E}_e[T_e] = \frac{1}{\pi(e)} = 8.$$

Partant de e, la chaîne met donc, en moyenne, un temps 8 à y revenir.

5. Notons $f(x)$ la probabilité partant de x de visiter $\{a, e\}$ avant $\{d, h\}$. Nous avons $f(a) = f(e) = 1$ et $f(d) = f(h) = 0$. Pour tout sommet x autre que b ou c, nous avons

$$f(x) = \mathbb{P}_x(T_b < T_c) = \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_x(T_b < T_c|\mathscr{F}_1)].$$

5. Notons respectivement τ_{ae} et τ_{dh} les premier temps de passage en $\{a, e\}$ et en $\{d, h\}$:

$$\tau_{ae} = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in \{a, e\}\} \text{ et } \tau_{dh} = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in \{d, h\}\}.$$

Nous voulons calculer, pour tout sommet x, la probabilité

$$q(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{ae} < \tau_{dh}).$$

Notons tout d'abord que $q(a) = q(e) = 1$ et $q(d) = q(h) = 0$. Ensuite, la propriété de Markov nous donne

$$\begin{aligned} q(x) &= \mathbb{P}_x(\tau_{ae} < \tau_{dh}) \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{\tau_{ae} < \tau_{dhh}\}}|\mathscr{F}_1]]. \end{aligned}$$

Partant d'un x autre que a, e, d ou h, on a $\tau_{ae} \geqslant 1$ et $\tau_{dh} \geqslant 1$ presque sûrement, et on a les égalités

$$\tau_{ae} = \widehat{\tau}_{ae}(\theta_1(X)) + 1 \text{ et } \tau_{dh} = \widehat{\tau}_{dh}(\theta_1(X)) + 1,$$

d'où il découle que

$$\{\tau_{ae} < \tau_{dh}\} = \{\widehat{\tau}_{ae}(\theta_1(X)) < \widehat{\tau}_{dh}(\theta_1(X))\},$$

si bien que la propriété de Markov au temps 1 nous donne

$$\begin{aligned} q(x) &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_1}[\mathbf{1}_{\{\tau_{ae} < \tau_{dhh}\}}]] \\ &= \mathbb{E}_x[q(X_1)]. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons les équations

$$\begin{aligned} q(a) &= q(e) = 1 \\ q(d) &= q(h) = 0 \\ q(b) &= q(f) = \frac{1}{3}(1 + q(c) + q(g)) \\ q(c) &= q(g) = \frac{1}{3}(q(b) + q(f)) \end{aligned}$$

On en déduit que $q(b) = q(f) = \frac{3}{5}$ et $q(c) = q(g) = \frac{2}{5}$.