Sorbonne Université — 2019 – 2020
Probabilités approfondies – MU4MA011 — 7 janvier 2020

Examen

L'épreuve dure trois heures.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.

Exercice 1. Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$, on se donne une sous-martingale positive $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$M_n = \max(X_0, \ldots, X_n).$$

1. Soit $n \geqslant 0$ un entier et $a \geqslant 0$ un réel. Démontrer que

$$a\mathbb{P}(M_n \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}\big[X_n \mathbf{1}_{\{M_n \geqslant a\}}\big].$$

(Cette inégalité est un résultat du cours : c'est une *démonstration* qui en est demandée ici.)

2. Pour tout réel $y > 0$, on note $(\log y)^+$ la partie positive du logarithme de y, c'est-à-dire

$$(\log y)^+ = \max(\log y, 0).$$

On pose de plus $(\log 0)^+ = 0$. Dans ce qui suit, e est la base du logarithme népérien.

Montrer que pour tout réel $y > 0$, on a l'inégalité $\log y \leqslant \frac{y}{e}$, puis montrer que pour tous réels $x, y \geqslant 0$, on a

$$x(\log y)^+ \leqslant x(\log x)^+ + \frac{y}{e}.$$

On pourra traiter successivement le cas où $y \leqslant 1$, puis le cas où $y \geqslant 1$ et $x \leqslant 1$, et enfin le cas où x et y sont supérieurs à 1.

3. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on a

$$\mathbb{E}[Z] \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant a)\, da.$$

4. Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$ on a

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant 1 + \mathbb{E}[X_n(\log M_n)^+],$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant \frac{e}{e-1}\big(1 + \mathbb{E}[X_n(\log X_n)^+]\big).$$

5. Que peut-on dire d'une martingale $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\sup\big\{\mathbb{E}\big[|Y_n|(\log |Y_n|)^+\big] : n \geqslant 0\big\} < +\infty\,?$$

On pourra commencer par démontrer, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité $x \leqslant 1 + x(\log x)^+$.

Exercice 2. Donner un énoncé précis et une démonstration du fait suivant : lorsqu'une sur-martingale positive atteint 0, elle y reste.

Exercice 3. 1. On considère sur un ensemble fini ou dénombrable E une chaîne de Markov de noyau de transition P. Parmi les six assertions suivantes, dire lesquelles sont équivalentes à l'assertion : "La chaîne de Markov est irréductible".

(Exceptionnellement, on ne demande dans cette question aucune justification, mais aucune autre réponse que la réponse exacte ne rapportera de points.)

a. Pour tous x et y dans E, on a $P(x, y) > 0$.
b. Pour tous x et y dans E et pour tout $n \geqslant 0$, on a $P^n(x, y) > 0$.
c. Pour tous x et y dans E, il existe $n \geqslant 0$ tel qu'on ait $P^n(x, y) > 0$.
d. Pour tous x et y dans E, il existe $n \geqslant 100$ tel qu'on ait $P^n(x, y) > 0$.
e. Pour tous x et y dans E, on a $\sum_{n\geqslant 0} P^n(x, y) > 0$.
f. Pour tous x et y dans E, on a $\sum_{n\geqslant 0} P^n(x, y) = \infty$.

2. Rappeler les définitions d'une mesure invariante et d'une mesure réversible d'une chaîne de Markov.

3. Montrer qu'une mesure invariante d'une chaîne de Markov irréductible donne une masse strictement positive à chaque élément de l'espace d'états.

4. Montrer que deux mesures réversibles d'une chaîne de Markov irréductible sont proportionnelles.

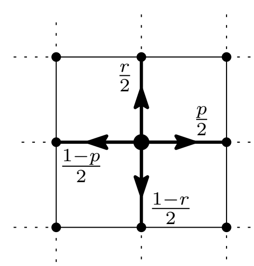
5. Existe-t-il une chaîne de Markov qui admette une mesure invariante, mais aucune mesure réversible ?

(Une réponse positive devra être accompagnée d'un exemple, une réponse négative d'une démonstration.)

6. (Il est conseillé de n'aborder cette question qu'après avoir cherché tout le reste du sujet.)

On se donne deux réels p et r strictement compris entre 0 et 1. On considère sur $\mathbb{Z}^2$ la chaîne de Markov qui, à chaque pas, se déplace vers la droite avec probabilité $p/2$, vers la gauche avec probabilité $(1-p)/2$, vers le haut avec probabilité $r/2$ et vers le bas avec probabilité $(1-r)/2$. Autrement dit, pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$\begin{aligned}
P((i,j),(i+1,j)) &= p/2 \\
P((i,j),(i-1,j)) &= (1-p)/2 \\
P((i,j),(i,j+1)) &= r/2 \\
P((i,j),(i,j-1)) &= (1-r)/2.
\end{aligned}$$



Déterminer autant de mesures invariantes que possible pour cette chaîne de Markov. Dire parmi ces mesures invariantes lesquelles sont réversibles.

Pour quelles valeurs de p et de r la chaîne est-elle récurrente ? (On pourra utiliser sans les démontrer les propriétés de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$.)

Exercice 4. On note $W = (W_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$, considérée comme une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^2$ de noyau de transition P donné, pour tous $w, z \in \mathbb{Z}^2$, par

$$P(w,z) = \frac{1}{4} \text{ si } \|z-w\|_2 = 1 \quad \text{et} \quad P(w,z) = 0 \text{ sinon.}$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on note X_n et Y_n les deux composantes de W_n, si bien que $W_n = (X_n, Y_n)$.

On travaille dans tout cet exercice sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0})$ muni d'une famille $(\mathbb{P}_w)_{w\in\mathbb{Z}^2}$ de mesures de probabilités. Vous pouvez, si vous le souhaitez, considérer que cet espace filtré est l'espace canonique de la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^2$ de noyau de transition P. Dans tous les cas, on dispose d'un opérateur de décalage noté θ.

On définit, pour tout entier $\ell \geqslant 0$,

$$T_\ell = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = X_0 + \ell\}.$$

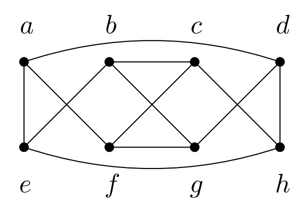
1. Rappeler la définition d'un temps d'arrêt et démontrer que pour tout $\ell \geqslant 0$, la variable aléatoire T_ℓ est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer que T_1 est fini $\mathbb{P}_{(0,0)}$-presque sûrement.

3. Exprimer, sous $\mathbb{P}_{(0,0)}$ et pour tout $\ell \geqslant 1$, le temps T_ℓ en fonction de $T_{\ell-1}$, de T_1 et d'un opérateur de décalage.

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_{T_\ell})_{\ell\geqslant 0}$ est, sous $\mathbb{P}_{(0,0)}$, une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ issue de 0 et dont on déterminera le noyau de transition en fonction de la loi de Y_{T_1}. Il n'est pas demandé de calculer cette loi explicitement.

Exercice 5. On considère la marche au hasard sur le graphe suivant :



qu'on étudie comme une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$.

1. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ? Cette chaîne est-elle apériodique ?

2. Déterminer toutes les mesures invariantes de cette chaîne de Markov.

3. Entre deux visites en a, combien de fois la chaîne passe-t-elle, en moyenne, en b ?

4. Partant de e, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à revenir en e ?

5. Calculer la probabilité, partant d'un sommet arbitraire x, de visiter la partie $\{a,e\}$ avant de visiter la partie $\{d,h\}$. (On pourra étudier cette probabilité comme une fonction de x.)

——— Fin du sujet ———