Sorbonne universitÃľ 2017 – 2018
ProbabilitÃľs approfondies – 4M011 29 mai 2018

Examen – DeuxiÃĺme session

L'Ãľpreuve dure trois heures.
Aucun document n'est autorisÃľ.
Le sujet occupe deux pages et comporte cinq exercices.

1. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilitÃľ. Soit X un ÃľlÃľment de $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1. a. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Rappeler la dÃľfinition de l'espÃľrance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.

1. b. Soit $\mathscr{H}$ une sous-tribu de $\mathscr{G}$. DÃľmontrer [1] l'ÃľgalitÃľ presque sÃżre

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{H}\big] = \mathbb{E}[X|\mathscr{H}].$$

2. Soient Y et Z deux ÃľlÃľments de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $Z = \mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]$ et que $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2]$. Montrer [2] que $Y = Z$ presque sÃżrement.

Solution de l'exercice 1. 1. a. L'espÃľrance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$ est l'unique variable alÃľatoire $W \in L^1(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$ qui vÃľrifie, pour tout ÃľvÃľnement $G \in \mathscr{G}$, l'ÃľgalitÃľ $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[W\mathbb{1}_G]$.

▶ Il s'agissait d'une question de cours, qui plus est de *la* question de cours fondamentale, puisque la notion d'espÃľrance conditionnelle est celle sur laquelle tout le cours s'appuie. J'ai donc ÃľtÃľ surpris de trouver dans une proportion, certes pas Ãľnorme, mais tout de mÃłme significative, de copies une dÃľfinition erronnÃľe de l'espÃľrance conditionnelle, ou pas de dÃľfinition.

Je profite de cette remarque pour indiquer que j'ai ÃľtÃľ globalement surpris par le nombre ÃľlevÃľ de copies qui ont obtenu une note faible Ãă cet examen, dont je pensais qu'il n'Ãľtait pas trop difficile - mais c'est quelque chose qu'il est toujours difficile d'estimer.

Le barÃłme prÃľvoyait

- 10 points pour les questions 1.1.a, 3.1.a, 3.1.b, 3.1.c, 3.2.a, pour rÃľpondre auxquelles il suffisait de restituer des dÃľfinitions du cours,
- 4 points pour la question 2.3 qui demandait l'application directe d'un thÃľorÃĺme du cours et pouvait Ãłtre traitÃľe en n'utilisant des deux questions prÃľcÃľdentes rien de plus que ce qui Ãľtait Ãľcrit dans l'ÃľnoncÃľ,
- 4 points pour la question 3.3 qui demandait la restitution d'un exemple du cours,

1. Il s'agit d'un rÃľsultat du cours, mais c'est bien la dÃľmonstration qui en est ici demandÃľe.
2. Pour cette question, on pourra utiliser toutes les propriÃľtÃľs connues de l'espÃľrance conditionnelle.

— 14 points pour les questions 1.1.b, 3.2.b, 3.2.c, qui demandaient la restitution de dÃľmonstrations du cours.

Je m'attendait Ãă donner l'essentiel de ces 32 points Ãă presque toutes les copies, et cela a ÃľtÃľ loin d'Ãłtre le cas. ◀

b. Il y a deux maniÃĺre de traiter cette question, qui correspondent Ãă deux maniÃĺres de lire l'ÃľgalitÃľ
$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{H}\big] = \mathbb{E}[X|\mathscr{H}],$$
de droite Ãă gauche ou de gauche Ãă droite.

La premiÃĺre consiste Ãă montrer que $V = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{H}\big]$ est une espÃľrance conditionnelle de X sachant $\mathscr{H}$:
$$\mathbb{E}[X|\mathscr{H}] = \underbrace{\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{H}\big]}_{V}.$$

La seconde consiste Ãă montrer que $W = \mathbb{E}[X|\mathscr{H}]$ est une espÃľrance conditionnelle de $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ sachant $\mathscr{H}$:
$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{H}\big] = \underbrace{\mathbb{E}[X|\mathscr{H}]}_{W}.$$

Si l'on adopte la premiÃĺre mÃľthode, il faut montrer que V est mesurable par rapport Ãă $\mathscr{H}$ et que pour tout $H \in \mathscr{H}$, on a
$$\mathbb{E}[V\mathbb{1}_H] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_H].$$
Si l'on adopte la deuxiÃĺme mÃľthode, il faut montrer que W est mesurable par rapport Ãă $\mathscr{H}$ et que pour tout $H \in \mathscr{H}$, on a
$$\mathbb{E}[W\mathbb{1}_H] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\mathbb{1}_H].$$

Les variables V et W sont chacune une espÃľrance conditionnelle sachant $\mathscr{H}$ et sont donc toutes deux mesurables par rapport Ãă $\mathscr{H}$.

Soit maintenant H un ÃľlÃľment de $\mathscr{H}$. Par dÃľfinition de V comme espÃľrance conditionnelle de $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ sachant $\mathscr{H}$, on a
$$\mathbb{E}[V\mathbb{1}_H] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\mathbb{1}_H\big].$$
Mais puisque $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$, on a $H \in \mathscr{G}$ et on dÃľduit de la dÃľfinition de l'espÃľrance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$ que
$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\mathbb{1}_H\big] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_H],$$
ce qui conclut la premiÃĺre mÃľthode.

Pour la deuxiÃĺme mÃľthode, on a, par dÃľfinition de W comme espÃľrance conditionnelle de X sachant $\mathscr{H}$,
$$\mathbb{E}[W\mathbb{1}_H] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_H].$$

Par ailleurs, puisque $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$, on a $H \in \mathscr{G}$ et

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\mathbb{1}_H] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_H],$$

ce qui conclut la deuxiÃĺme mÃľthode.

2. On peut rÃľpondre Ãă cette question de plusieurs maniÃĺres. En voici deux.

Une mÃľthode – Calculons l'espÃľrance de $(Y-Z)^2$: elle vaut

$$\mathbb{E}[(Y-Z)^2] = \mathbb{E}[Y^2 - 2YZ + Z^2].$$

Calculons l'espÃľrance de YZ en conditionnant par rapport Ãă $\mathscr{G}$. On trouve

$$\mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[YZ|\mathscr{G}]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]Z\big] = \mathbb{E}[Z^2],$$

la premiÃĺre Ãľgalitľ venant du fait que Z est $\mathscr{G}$-mesurable et la deuxiÃĺme de l'hypothÃĺse $\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] = Z$.

Finalement, on trouve

$$E[(Y-Z)^2] = \mathbb{E}[Y^2] + \mathbb{E}[Z^2] - 2\mathbb{E}[Z^2] = 0,$$

car $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2]$.

La variable alÃľatoire $(Y-Z)^2$, positive et d'espÃľrance nulle, est nulle presque sÃżrement, donc $Y = Z$ presque sÃżrement.

Une autre mÃľthode – Une des caractÃľrisations de l'espÃľrance conditionnelle sachant $\mathscr{G}$, pour des variables de carrÃľ intÃľgrable, est d'Ãłtre la projection orthogonale sur $L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$. Ainsi, on sait que la dÃľcomposition

$$Y = \mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] + (Y - \mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]) = Z + (Y-Z)$$

de Y est une dÃľcomposition comme somme de deux vecteurs orthogonaux. Le thÃľorÃĺme de Pythagore nous dit alors que

$$\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2] + \mathbb{E}[(Y-Z)^2]$$

et l'hypothÃĺse que $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2]$ entraÃőne $\mathbb{E}[(Y-Z)^2] = 0$, d'oÃź on conclut comme dans la mÃľthode prÃľcÃľdente, qui n'Ãľtait finalement pas si diffÃľrente.

2. Dans cet exercice, toutes les variables alÃľatoires sont dÃľfinies sur un espace de probabilitÃľ $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables alÃľatoires indÃľpendantes et identiquement distribuÃľes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $a \in]0,1[$ un nombre rÃľel. On dÃľfinit une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables alÃľatoires en posant $X_0 = a$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n^2.$$

1. Montrer que presque sÃżrement, pour tout $n \geqslant 0$, on a $X_n \in [0,1]$.

2. a. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a l'inclusion $\mathscr{F}_n \subset \sigma(U_1, \ldots, U_n)$.

b. Montrer que la suite $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ est une sous-martingale par rapport Ãă sa filtration naturelle.

3. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ converge, dans un ou des sens que l'on prÃľcisera, vers une limite dÃľterministe que l'on calculera.

Solution de l'exercice 2. 1. Montrons par rÃľcurrence sur n que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}(0 < X_n < 1) = 1$.

Pour $n = 0$, l'assertion est vraie par hypothÃĺse sur a. Donnons-nous maintenant un entier $n \geqslant 0$ et supposons dÃľmontrÃľ que $\mathbb{P}(0 < X_n < 1) = 1$. On a presque sÃżrement $0 < U_{n+1} < 1$, si bien que $U_{n+1} > 0$ et $1 - U_{n+1} > 0$, d'oÃź on dÃľduit, en utilisant l'hypothÃĺse de rÃľcurrence,

$$0 < U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n^2 < U_{n+1} + (1 - U_{n+1}) = 1,$$

toutes ces inÃľgalitÃľs ayant lieu presque sÃżrement. Nous avons donc dÃľmontrÃľ, comme nous le souhaitions, que $\mathbb{P}(0 < X_{n+1} < 1) = 1$, et le principe de rÃľcurrence achÃĺve la dÃľmonstration.

2. a. DÃľmontrons cette assertion par rÃľcurrence sur n. Pour $n = 1$, l'Ãľgalité $X_1^2 = U_1 + (1 - U_1)a$ montre que X_1 est mesurable par rapport Ãă $\sigma(U_1)$. Puisque X_0 est constante, elle est Ãľgalement mesurable par rapport Ãă $\sigma(U_1)$, si bien que $\mathscr{F}_1 \subset \sigma(U_1)$.

ConsidÃľrons maintenant $n \geqslant 1$ et supposons dÃľmontrÃľ que $\mathscr{F}_n \subset \sigma(U_1, \ldots, U_n)$. La dÃľfinition de X_{n+1} montre que cette variable alÃľatoire est mesurable par rapport Ãă toute tribu qui rend mesurable U_{n+1} et X_n. Par hypothÃĺse de rÃľcurrence, c'est le cas de la tribu $\sigma(U_1, \ldots, U_{n+1})$. Ainsi, $\mathscr{F}_{n+1} \subset \sigma(U_1, \ldots, U_{n+1})$.

b. Le processus $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ est, par dÃľfinition, adaptÃľ par rapport Ãă sa filtration naturelle $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$. Nous avons dÃľmontrÃľ Ãă la question 1 que l'inÃľgalitÃľ $|X_n| \leqslant 1$ avait lieu presque sÃżrement pour tout $n \geqslant 0$, ce qui entraÃőne en particulier que la variable alÃľatoire X_n est intÃľgrable pour tout $n \geqslant 0$.

Calculons maintenant, pour tout $n \geqslant 0$, l'espÃľrance conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathscr{F}_n$. D'aprÃĺs le rÃľsultat de la question 2.a, la variable alÃľatoire U_{n+1}, qui est indÃľpendante de $\sigma(U_1, \ldots, U_n)$, est indÃľpendante de $\mathscr{F}_n$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n^2|\mathscr{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[U_{n+1|}\mathscr{F}_n] + \mathbb{E}[(1 - U_{n+1})X_n^2|\mathscr{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[U_{n+1}] + X_n^2\,\mathbb{E}[(1 - U_{n+1})|\mathscr{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[U_{n+1}] + X_n^2\,\mathbb{E}[(1 - U_{n+1})] \\
&= \frac{1 + X_n^2}{2}.
\end{aligned}$$

Pour tout rÃľel x, on a $1 + x^2 \geqslant 2x$, si bien que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \geqslant X_n$, ce qui montre que la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une sous-martingale.

3. La sous-martingale $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est bornÃľe supÃľrieurement par 1, elle converge donc presque sÃżrement vers une variable alÃľatoire X_∞ qui est intÃľgrable (pour appliquer

littÃľralement un thÃľorÃĺme du cours, on peut dire que $(1 - X_n)_{n\geqslant 0}$ est une surmartingale positive).

Puisque la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est en fait comprise entre 0 et 1, au sens oÃź $\mathbb{P}(0 < X_n < 1) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$, nous pouvons affirmer que $\mathbb{P}(0 \leqslant X_\infty \leqslant 1) = 1$ (avec des inÃľgalitÃľs larges). De plus, par convergence dominÃľe, la convergence de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ vers X_∞ a lieu presque sÃżrement et dans L^p pour tout $p \in [1, \infty[$.

Essayons de calculer l'espÃľrance de X_∞. Puisque la convergence a lieu dans L^1, c'est la limite des espÃľrances des X_n lorsque n tend vers l'infini. Par ailleurs, puisque la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans L^2, on a aussi convergence de l'espÃľrance de X_n^2 vers l'espÃľrance de X_∞^2. Or pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \frac{1 + \mathbb{E}[X_n^2]}{2}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on trouve

$$\mathbb{E}[X_\infty] = \frac{1 + \mathbb{E}[X_\infty^2]}{2}.$$

Cette ÃľgalitÃľ ne nous permet pas vraiment de dÃľterminer l'espÃľrance de X_∞, mais elle peut se rÃľÃľcrire sous la forme

$$\mathbb{E}[(X_\infty - 1)^2] = 0,$$

qui montre que $X_\infty = 1$ presque sÃżrement.

3. 1. a. Rappeler la dÃľfinition d'un Ãľtat rÃľcurrent d'une chaÃőne de Markov.

b. Rappeler (sans dÃľmonstration) ce que vaut la loi du nombre de visites en un Ãľtat rÃľcurrent partant de cet Ãľtat.

c. Rappeler (toujours sans dÃľmonstration) comment s'exprime, en termes de la matrice de transition et de ses puissances, le fait qu'un Ãľtat est rÃľcurrent.

2. a. Rappeler ce que signifie l'assertion qu'un Ãľtat x d'une chaÃőne de Markov mÃĺne Ãă un autre Ãľtat y de cette chaÃőne.

b. DÃľmontrer que si un Ãľtat rÃľcurrent x d'une chaÃőne de Markov mÃĺne Ãă un Ãľtat y, alors l'Ãľtat y mÃĺne Ãľgalement Ãă x.

c. DÃľmontrer que si un Ãľtat rÃľcurrent x d'une chaÃőne de Markov mÃĺne Ãă un Ãľtat y, alors l'Ãľtat y est Ãľgalement rÃľcurrent.

3. DÃľcrire la chaÃőne de Markov dont l'espace d'Ãľtat est $\mathbb{Z}$ et qu'on appelle la *marche alÃľatoire simple sur* $\mathbb{Z}$ et montrer que tous ses Ãľtats sont rÃľcurrents.

4. Soit $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables alÃľatoires indÃľpendantes et identiquement distribuÃľes telles que pour tout $n \geqslant 1$, on ait $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

On dÃľfinit $T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = -2018\}$.

1. Donner deux dÃľmonstrations du fait que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, l'une utilisant les propriÃľtÃľs de convergence des martingales et l'autre utilisant les propriÃľtÃľs des Ãľtats rÃľcurents des chaÃőnes de Markov.

2. La suite de variables alÃľatoires $(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ est-elle uniformÃľment intÃľgrable ?

Solution de l'exercice 4. 1. *En utilisant les propriÃľtÃľs des martingales* – La suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport Ãă sa filtration naturelle, et T est un temps d'arrÃłt par rapport Ãă cette filtration. Ainsi, le processus arrÃłtÃľ $X^T = (X_n^T)_{n\geqslant 0} = (X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ est Ãľgalement une martingale. De plus, par construction, ce processus est bornÃľ infÃľrieurement, par -2018. Le thÃľorÃÍme de convergence des martingales s'applique Ãă cette martingale arrÃłtÃľe et nous permet d'affirmer qu'elle converge presque sÃżrement. Or, sur l'ÃľvÃľnement $\{T = \infty\}$, on a $|X_{n+1} - X_n| = 1$ pour tout $n \geqslant 0$, et la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas. Plus formellement, on a

$$\begin{aligned}\{T=\infty\} &= \{T=\infty\} \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} \{|X_{n+1}-X_n| = 1\} \\ &\subseteq \{T=\infty\} \cap \{\text{la suite } (X_n)_{n\geqslant 0} \text{ ne converge pas}\} \\ &\subseteq \{\text{la suite } (X_n)_{n\geqslant 0} \text{ ne converge pas}\},\end{aligned}$$

si bien que

$$\mathbb{P}(T=\infty) \leqslant \mathbb{P}(\text{la suite } (X_n)_{n\geqslant 0} \text{ ne converge pas}) = 0,$$

ce qui donne le rÃľsultat souhaitÃľ.

En utilisant les propriÃľtÃľs des chaÃőnes de Markov – La suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ a la loi de la marche alÃľatoire sur $\mathbb{Z}$ ÃľtudiÃľe Ãă l'exercice prÃľcÃľdent sous la mesure $\mathbb{P}_0$. L'Ãľtat 0 est rÃľcurrent et mÃÍne Ãă tous les autres Ãľtats, en particulier Ãă l'Ãľtat -2018. Lorsqu'un Ãľtat x mÃÍne Ãă un autre Ãľtat y, on sait que partant de x, on est certain de visiter y. Ainsi, partant de 0, on est certain de visiter -2018, c'est-Ãă-dire que T est fini presque sÃżrement.

2. La suite $(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ converge presque sÃżrement vers $X_T = -2018$. Or pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}[X_{T\wedge n}] = 0 \neq \mathbb{E}[X_T]$.

La convergence de la suite $(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ n'a donc pas lieu dans L^1. Si cette suite Ãľtait uniformÃľment intÃľgrable, sa convergence presque sÃżre vers cette limite entraÃőnerait la convergence dans L^1, qui n'a pas lieu. Elle n'est donc pas uniformÃľment intÃľgrable.

Solution de l'exercice 4. 1. a. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, X = (X_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ une chaÃőne de Markov de matrice de transition P sur l'espace d'Ãľtats E.

Soit $x \in E$. On dÃľfinit

$$T_x = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = x\}$$

le premier temps de retour en x. On dit que l'Ãľtat x est rÃľcurrent si

$$\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1.$$

En français : un Ãľtat est rÃľcurrent si partant de cet Ãľtat, on est certain d'y revenir.

b. Pour tout Ãľtat $z \in E$, on dÃľfinit le nombre total de visites en z comme

$$N_z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = z\}}.$$

Si l'Ãľtat x est rÃľcurrent, alors

$$\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1.$$

Partant d'un Ãľtat rÃľcurrent, on le visite une infinitÃľ de fois avec probabilitÃľ 1.

c. On dÃľmontre que si un Ãľtat n'est pas rÃľcurrent (c'est-Ãă-dire, s'il est transient), le nombre moyen de visites Ãă cet Ãľtat partant de cet Ãľtat est fini. La quantitÃľ

$$\mathbb{E}_x[N_x] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, x)$$

est donc infinie si et seulement si x est rÃľcurrent.

2. On dit qu'un Ãľtat x mÃĺne Ãă un Ãľtat y si

$$\mathbb{E}_x[N_y] > 0.$$

Supposons que x est rÃľcurrent et mÃĺne Ãă y. Si $y = x$, alors y est rÃľcurrent. Supposons $y \neq x$. Alors on peut Ãľcrire que, partant de x, sur l'ÃľvÃľnement oÃź on atteint y puis on ne revient jamais en x, le nombre total de visites en x est fini :

$$0 = \mathbb{P}_x(N_x < \infty) \geqslant \mathbb{P}_x(T_y < \infty, \widehat{T}_x(\theta_{T_y}(X)) = \infty).$$

La propriÃľtÃľ de Markov forte nous permet d'Ãľcrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(T_y < \infty, \widehat{T}_x(\theta_{T_y}(X)) = \infty) &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\widehat{T}_x(\theta_{T_y}(X)) = \infty\}} \mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}}] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\widehat{T}_x(\theta_{T_y}(X)) = \infty\}} \mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}} | \mathscr{F}_{T_x}]\right] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_{T_y}}[T_x = \infty] \mathbb{1}_{\{T_x < \infty\}}] \\
&= \mathbb{P}_y(T_x = \infty)\mathbb{P}_x(T_x < \infty) \\
&= \mathbb{P}_y(T_x = \infty).
\end{aligned}$$

On en dÃľduit que $\mathbb{P}_y(T_x < \infty) = 1$. En particulier, il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}_y(T_x = n) > 0$, si bien que $\mathbb{P}_y(X_n = x) > 0$ et $\mathbb{E}_y[N_x] > 0$: l'Ãľtat y mÃĺne Ãă l'Ãľtat x.

c. L'Ãľtat x mÃĺne Ãă l'Ãľtat y, donc il existe un entier $a \geqslant 0$ tel que $P^a(x, y) > 0$. De mÃłme, l'Ãľtat y mÃĺne Ãă l'Ãľtat x, donc il existe un entier $b \geqslant 0$ tel que $P^b(y, x) > 0$.

L’Ãľtat x est rÃľcurrent, donc $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,x) = \infty$. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P^n(y,y) &\geqslant \sum_{n=a+b}^{\infty} P^n(y,y) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} P^{b+m+a}(y,y) \\
&\geqslant \sum_{m=0}^{\infty} P^b(y,x)P^m(x,x)P^a(x,y) \\
&= \underbrace{P^a(x,y)P^b(y,x)}_{>0} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} P^m(x,x)}_{=\infty} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

L’Ãľtat y est donc rÃľcurrent.

3. La matrice de transition de la marche alÃľatoire simple sur $\mathbb{Z}$ est la matrice P dont les seuls coefficients non nuls sont les

$$P(i,i+1) = P(i,i-1) = \frac{1}{2},$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Pour tous i et j entiers relatifs, on a

$$\mathbb{P}_i(X_{|j-i|} = j) = 2^{-|j-i|} > 0,$$

si bien que i mÃĺne Ãă j. Tous les Ãľtats mÃĺnent Ãă tous les autres : on dit que cette chaÃőne est irrÃľductible. Tous ses Ãľtats sont donc de mÃłme nature : soit tous rÃľcurrents, soit tous transients.

Montrons que 0 est un Ãľtat rÃľcurrent. Pour cela, nous allons calculer $\mathbb{P}_0(X_n = 0)$ pour tout $n \geqslant 0$. Tout d’abord, puisque la marche avance par pas de 1 ou -1, on a pour tout $n \geqslant 0$

$$\mathbb{P}_0(X_{2n} \in 2\mathbb{Z}) = \mathbb{P}_0(X_{2n+1} \in 2\mathbb{Z}+1) = 1.$$

Autrement dit, aux temps pairs, la marche se trouve en un entier pair ; et aux temps impairs, en un entier impair.

Si n est impair, on a en particulier $\mathbb{P}_0(X_n = 0) = 0$. Supposons maintenant n pair, Ãľgal Ãă $2m$. Les trajectoires de longueur $2m$ qui vont de 0 Ãă 0 montent exactement m fois et descendent exactement m fois. Une telle trajectoire est entiÃĺrement dÃľterminÃľe par le sous-ensemble de ses $2m$ pas qui sont des pas vers le haut. Il y a $\binom{2m}{m}$ maniÃĺre de choisir ce sous-ensemble. Ainsi,

$$\mathbb{P}_0(X_{2m} = 0) = \binom{2m}{m} 2^{-2m}.$$

La formule de Stirling, qui affirme que $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, permet de dÃľterminer un Ãľquivalent de cette probabilitÃľ :

$$\mathbb{P}_0(X_{2m} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

La sÃľrie de terme gÃľnÃľral $\frac{1}{\sqrt{pim}}$ diverge et deux sÃľries Ãă termes positifs dont les termes gÃľnÃľraux sont Ãľquivalents sont toutes deux convergentes, ou toutes deux divergentes. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_0(X_n = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_0(X_{2m} = 0) = \infty,$$

c'est-Ãă-dire que l'Ãľtat 0 est rÃľcurrent.

5. Un professeur anglais possÃÍde un nombre entier $N \geqslant 1$ de parapluies, rÃľpartis entre son bureau et son domicile. Il se rend Ãă son bureau Ãă pied le matin et rentre chez lui Ãă pied le soir. S'il pleut, et s'il en a un Ãă sa disposition, il prend un parapluie. S'il fait beau, il n'en prend pas. On suppose qu'Ãă chaque trajet du professeur il pleut avec probabilitÃľ $p \in \,]0,1[\,$, indÃľpendamment des trajets prÃľcÃľdents.

1. ÃĽcrire la matrice de transition d'une chaÃőne de Markov sur l'espace d'Ãľtats $\{0, \dots, N\}$ qui modÃľlise convenablement ce problÃÍme, l'entier k correspondant Ãă la situation oÃź il y a k parapluies Ãă l'endroit oÃź se trouve le professeur.

2. Cette chaÃőne de Markov est-elle irrÃľductible ? Quels sont ses Ãľtats rÃľcurrents ?

3. DÃľterminer toutes les mesures invariantes de cette chaÃőne.

4. Quelle est, asymptotiquement, la proportion des trajets durant lesquels le professeur marche sous la pluie sans parapluie ? VÃľrifier que pour $p = \frac{1}{2}$, cette proportion vaut $\frac{1}{4N+2}$.

5. Quelle est la pÃľriode de la chaÃőne de Markov que nous sommes en train d'Ãľtudier ?

Solution de l'exercice 5. 1. Si le professeur a $k > 0$ parapluies Ãă sa disposition (par exemple Ãă son bureau), cela signifie qu'il y en a $N - k$ Ãă l'endroit oÃź va se rendre (dans notre exemple, son domicile). Avec probabilitÃľ p, il va prendre un parapluie et l'amener Ãă l'autre endroit, oÃź il y en aura donc $N - k + 1$ et avec probabilitÃľ $1 - p$, il ne va pas en prendre, et il y aura donc $N - k$ parapluies Ãă l'endroit oÃź il se rend.

S'il y a 0 parapluies lÃă oÃź se trouve le professeur, il n'aura pas d'autre possibilitÃľ que de ne pas en prendre, et il y en aura N lÃă oÃź il se rend.

Finalement, la matrice de transition est donnÃľe par $P(0, N) = 1$ et

$$\forall k \in \{1, \dots, N\},\; P(k, N - k + 1) = p,\; P(k, N - k) = 1 - p.$$

2. La chaÃőne est irrÃľductible : en effet, on a

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow 1 \longrightarrow N - 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow N - 2 \longrightarrow \dots$$

Une autre maniÃĺre, plus formelle, de le dire, est que pour tout entier $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, on a $k \longrightarrow N-k \longrightarrow k+1$, si bien que chaque entier mÃĺne au suivant, et N mÃĺne Ãă 0.

L'espace d'Ãľtats de cette chaÃőne est fini, elle a donc un Ãľtat rÃľcurrent. Comme elle est irrÃľductible, tous ses Ãľtats sont de mÃłme nature : ils sont donc tous rÃľcurrents.

3. Cherchons si cette chaÃőne admet une mesure rÃľversible μ. Une telle mesure doit vÃľrifier pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$ l'ÃľgalitÃľ $\mu(k) = \mu(N-k+1)$, pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ l'ÃľgalitÃľ $\mu(k) = \mu(N-k)$, et l'ÃľgalitÃľ $\mu(0) = \mu(N)(1-p)$. Ces ÃľgalitÃľs se rÃľsument Ãă

$$\mu(1) = \mu(2) = \ldots = \mu(N) \text{ et } \mu(0) = (1-p)\mu(N).$$

Il existe donc une mesure rÃľversible, donnÃľe par

$$\mu(0) = 1-p \text{ et } \mu(k) = 1 \text{ pour } k \in \{1, \ldots, N\}.$$

L'unique mesure de probabilitÃľ invariante pour notre chaÃőne est donc la mesure π donnÃľe par

$$\pi(0) = \frac{1-p}{N+1-p} \text{ et } \pi(k) = \frac{1}{N+1-p} \text{ pour } k \in \{1, \ldots, N\}.$$

La chaÃőne Ãľtant irrÃľductible et rÃľcurrente, deux mesures invariantes quelconques sont proportionnelles. L'ensemble des mesures invariantes de la chaÃőne est donc

$$\{c\pi : c > 0\}.$$

4. D'aprÃĺs le thÃľorÃĺme ergodique, la chaÃőne passe asymptotiquement en 0 une proportion $\frac{1-p}{N+1-p}$ du temps. ÃĂ chaque passage en 0, le professeur a une probabilitÃľ p que le prochain trajet se passe sous la pluie, sans parapluie. La proportion des trajets durant lesquels le professeur marche sous la pluie sans parapluie vaut donc

$$\frac{p(1-p)}{N+1-p}.$$

5. Puisque la chaÃőne est irrÃľductible, tous ses ÃľlÃľments ont la mÃłme pÃľriode. Si N est pair, Ãľgal Ãă $2M$, alors on a $P(M, M) > 0$, donc la pÃľriode de M vaut 1. Si N est impair, Ãľgal Ãă $2M+1$, alors on a$P(M+1, M+1) > 0$, donc la pÃľriode de $M+1$ vant 1. Dans tous les cas, la chaÃőne est apÃľriodique.

——— Fin du sujet ———