Sorbonne université
Probabilités approfondies – 4M011

2017 – 2018
29 mai 2018

Examen – Deuxième session

L'épreuve dure trois heures.
Aucun document n'est autorisé.
Le sujet occupe deux pages et comporte cinq exercices.

1. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit X un élément de $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1. a. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.

1. b. Soit $\mathscr{H}$ une sous-tribu de $\mathscr{G}$. Démontrer [1] l'égalité presque sûre

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{H}\big] = \mathbb{E}[X|\mathscr{H}].$$

2. Soient Y et Z deux éléments de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $Z = \mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]$ et que $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2]$. Montrer [2] que $Y = Z$ presque sûrement.

2. Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $a \in \,]0,1[$ un nombre réel. On définit une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires en posant $X_0 = a$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n^2.$$

1. Montrer que presque sûrement, pour tout $n \geqslant 0$, on a $X_n \in [0,1]$.

2. a. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a l'inclusion $\mathscr{F}_n \subset \sigma(U_1, \ldots, U_n)$.

b. Montrer que la suite $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale par rapport à sa filtration naturelle.

3. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge, dans un ou des sens que l'on précisera, vers une limite déterministe que l'on calculera.

---

1. Il s'agit d'un résultat du cours, mais c'est bien la démonstration qui en est ici demandée.
2. Pour cette question, on pourra utiliser toutes les propriétés connues de l'espérance conditionnelle.

3. 1. a. Rappeler la définition d'un état récurrent d'une chaîne de Markov.

b. Rappeler (sans démonstration) ce que vaut la loi du nombre de visites en un état récurrent partant de cet état.

c. Rappeler (toujours sans démonstration) comment s'exprime, en termes de la matrice de transition et de ses puissances, le fait qu'un état est récurrent.

2. a. Rappeler ce que signifie l'assertion qu'un état x d'une chaîne de Markov mène à un autre état y de cette chaîne.

b. Démontrer que si un état récurrent x d'une chaîne de Markov mène à un état y, alors l'état y mène également à x.

c. Démontrer que si un état récurrent x d'une chaîne de Markov mène à un état y, alors l'état y est également récurrent.

3. Décrire la chaîne de Markov dont l'espace d'état est $\mathbb{Z}$ et qu'on appelle la *marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}$ et montrer que tous ses états sont récurrents.

4. Soit $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que pour tout $n \geqslant 1$, on ait $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

On définit $T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = -2018\}$.

1. Donner deux démonstrations du fait que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, l'une utilisant les propriétés de convergence des martingales et l'autre utilisant les propriétés des états récurents des chaînes de Markov.

2. La suite de variables aléatoires $(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ est-elle uniformément intégrable ?

5. Un professeur anglais possède un nombre entier $N \geqslant 1$ de parapluies, répartis entre son bureau et son domicile. Il se rend à son bureau à pied le matin et rentre chez lui à pied le soir. S'il pleut, et s'il en a un à sa disposition, il prend un parapluie. S'il fait beau, il n'en prend pas. On suppose qu'à chaque trajet du professeur il pleut avec probabilité $p \in \,]0,1[$, indépendamment des trajets précédents.

1. Écrire la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{0,\ldots,N\}$ qui modélise convenablement ce problème, l'entier k correspondant à la situation où il y a k parapluies à l'endroit où se trouve le professeur.

2. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?

3. Déterminer toutes les mesures invariantes de cette chaîne.

4. Quelle est, asymptotiquement, la proportion des trajets durant lesquels le professeur marche sous la pluie sans parapluie ? Vérifier que pour $p = \frac{1}{2}$, cette proportion vaut $\frac{1}{4N+2}$.

5. Quelle est la période de la chaîne de Markov que nous sommes en train d'étudier ?

——— Fin du sujet ———