Sorbonne Université — 2017 – 2018
Probabilités approfondies – 4M011 — 9 janvier 2018

Examen

L'épreuve dure trois heures.
Aucun document n'est autorisé.
Le sujet occupe trois pages et comporte quatre exercices.

1. On considère l'espace de probabilité $([0,1[, \mathscr{B}, \lambda)$, où $\mathscr{B}$ est la tribu borélienne de $[0,1[$ et λ est la mesure de Lebesgue. On fixe un paramètre $\alpha > 0$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$X_n = (n+1)^\alpha \mathbb{1}_{\left[0, \frac{1}{n+1}\right[}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on note

$$\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$$

et on travaille sur l'espace de probabilité filtré $([0,1[, \mathscr{B}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \lambda)$

1. a. Pour tout $n \geqslant 0$, écrire la partition de $[0,1[$ qui engendre la tribu $\mathscr{F}_n$. Combien d'éléments a la tribu $\mathscr{F}_n$?

b. A-t-on l'égalité

$$\mathscr{B} = \sigma\left(\bigcup_{n\geqslant 0} \mathscr{F}_n\right)?$$

2. a. Calculer, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $p \in [1, \infty[$, la norme L^p de X_n, c'est-à-dire la quantité $\mathbb{E}[|X_n|^p]^{\frac{1}{p}}$.

b. Pour quels $p \in [1, \infty[$ la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle bornée dans L^p ?

3. a. Montrer, pour tout $n \geqslant 0$, que l'espérance conditonnelle $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]$ existe, et la calculer.

b. Déterminer, en fonction de α, si la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale, une sous-martingale, une sur-martingale, ou rien de tout cela.

4. Étudier la convergence presque sûre et, pour tout $p \in [1, \infty[$, la convergence dans L^p de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

5. Soit $p \in]1, \infty[$. Au vu de ce qui précède, que pensez-vous de l'assertion que toute sous-martingale bornée dans L^p converge presque sûrement et dans L^p ?

6. Et que pensez-vous de l'assertion que toute sous-martingale bornée dans L^1 converge presque sûrement et dans L^1 ?

Solution de l'exercice 1. 1. a. Pour tout $n \geqslant 0$, posons

$$\mathscr{G}_n = \sigma\left(\left\{\left[0, \frac{1}{n+1}\right[, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[, \ldots, \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[, \left[\frac{1}{2}, 1\right[\right\}\right).$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathscr{F}_n = \mathscr{G}_n$. Pour $n = 0$, on a $X_0 = \mathbb{1}_{[0,1[}$ donc $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, [0,1[\} = \mathscr{G}_0$. Considérons maintenant $n \geqslant 0$ et supposons démontré que $\mathscr{F}_n = \mathscr{G}_n$.

On a $\mathscr{G}_{n+1} = \sigma(\mathscr{G}_n \cup \{[0, \frac{1}{n+2}]\}) = \sigma(\mathscr{G}_n \cup \sigma(X_{n+1})) = \sigma(\mathscr{F}_n \cup \sigma(X_{n+1})) = \mathscr{F}_{n+1}$.

On a finalement

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \mathscr{F}_n = \sigma\left(\left\{\left[0, \frac{1}{n+1}\right[, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[, \ldots, \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[, \left[\frac{1}{2}, 1\right[\right\}\right)}$$

La tribu $\mathscr{F}_n$ est engendrée par une partition de $[0,1[$ à $n+1$ éléments, donc

$$\boxed{|\mathscr{F}_n| = 2^{n+1}}$$

► J'ai souvent lu des versions plus ou moins exactes de l'affirmation

$$\mathscr{F}_n = \sigma\left(\left\{\left[0, \frac{1}{k+1}\right[: k \in \{0, \ldots, n\}\right\}\right)$$

qui est exacte mais qui ne répond pas à la question, puisque la famille d'intervalles utilisée pour engendrer $\mathscr{F}_n$ n'est pas une partition de $[0,1[$.

Une analyse trop rapide de $\mathscr{F}_n$ a aussi conduit certains à penser qu'il s'agissait de la tribu engendrée par les intervalles dyadiques de largeur 2^{-n}. ◄

b. La tribu engendrée par l'union des $\mathscr{F}_n$ est la tribu

$$\mathscr{F}_\infty = \sigma\left(\left\{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[: n \geqslant 1\right\}\right)$$

qui n'est pas égale à la tribu $\mathscr{B}$. En effet, la tribu $\mathscr{F}_\infty$ ne contient par exemple qu'un singleton, le singleton $\{0\}$, alors que $\mathscr{B}$ contient $\{t\}$ pour tout $t \in [0,1[$.

2. On a

$$\boxed{\|X_n\|_{L^p} = (n+1)^{\alpha - \frac{1}{p}}}$$

si bien que la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée dans L^p si et seulement si

$$\boxed{p \leqslant \frac{1}{\alpha}}$$

► Ces deux questions ont causé plus de problèmes que je ne m'y attendais. Les erreurs dans le calcul de la norme L^p de X_n ont été fréquentes, et j'ai souvent lu que la suite était bornée dans L^p si et seulement si $p < \frac{1}{\alpha}$, ce qui, sans être très faux, n'est pas tout à fait juste.

Un certain nombre d'étudiants ont été troublés par le fait que l'inégalité ne pouvait être satisfaite lorsque $\alpha > 1$. On pouvait le remarquer, mais il était inutile de s'en inquiéter. Le fait est que lorsque $\alpha \geqslant 1$, la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ n'est bornée dans L^p pour aucun $p \geqslant 1$. ◄

3. a. Pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire X_{n+1} est bornée, donc intégrable, donc elle admet une espérance conditionnelle sachant $\mathscr{F}_n$. Cette espérance conditionnelle se calcule en appliquant la formule qui s'applique dans le cas, qui est le nôtre, où la tribu par rapport à laquelle on conditionne est engendrée par une partition dénombrable, ici finie. On trouve

$$\boxed{\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = (n+2)^{\alpha-1}(n+1)\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{n+1}\right[} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\alpha-1} X_n}$$

► Dans un certain nombre de copies, l'existence de l'espérance conditionnelle n'a pas été justifiée, ou mal. La forme la plus grave de cette erreur consiste à écrire

«L'espérance conditionnelle existe car $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \ldots$ »

L'erreur est ici la même qui consiste à dire

«L'intégrale de f par rapport à μ existe car $\int f\, d\mu = \ldots$ »

Ces preuves se mordent la queue, puisqu'elles considèrent l'objet (espérance conditionnelle, intégrale) dont elles cherchent à prouver l'existence. ◄

b. Si $\alpha \geqslant 1$, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale. Si $\alpha \leqslant 1$, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une sur-martingale. Si $\alpha = 1$, c'est une martingale.

4. La suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers 0, et elle converge dans L^p vers 0 pour

$$\boxed{p < \frac{1}{\alpha}}$$

► Tout absorbés à appliquer les théorèmes de convergence des (sur-/sous-)martingales, peu de gens ont observé que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers 0, alors qu'on peut le voir sur sa définition même. Sa seule limite possible dans L^p est donc 0.

Il était ensuite inutile de distinguer les cas selon les positions relatives de 1 et α. Comme à la question 2, lorsque $\alpha \geqslant 1$, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge dans aucun L^p. ◄

5. Considérons $\alpha = \frac{1}{p}$. Alors la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une sur-martingale bornée dans L^p mais qui ne converge pas dans L^p. En effet, elle converge presque sûrement vers 0, mais pas dans L^p. L'assertion est donc fausse.

6. Le cas $\alpha = 1$ nous montre, de même, que l'assertion est fausse.

► Certains ont cru que l'assertion de la question 5 était une application d'un théorème du cours, oubliant que le théorème en question n'était énoncé (et à raison, comme on le voit) que pour les martingales.

Plus insidieusement, certains ont écrit :

« Le théorème du cours n'est vrai que pour les martingales. L'assertion est donc fausse.»

Il n'est pas vrai que toutes les assertions correctes concernant les (sur-/sous-)martingales soient énoncées dans le cours : le fait que l'assertion 5 ne s'y trouve pas ne démontre pas qu'elle soit fausse ! ◄

2. Dans une boîte se trouvent un certain nombre non nul de boules donc chacune est soit rouge soit bleue. On répète indéfiniment l'opération qui consiste à tirer une boule de la boîte au hasard et à l'y replacer en ajoutant une boule de la même couleur. Ainsi, si on tire une boule rouge de la boîte, on y replace deux boules rouges ; et si on tire une boule bleue, on y replace deux boules bleues.

À chaque instant, on décrit l'état de la boîte par un couple (r, b) d'entiers, où r est le nombre de boules rouges et b le nombre de boules bleues dans la boîte. On notera dans ce qui suit $\mathbb{N}^2_* = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Écrire une matrice de transition sur $\mathbb{N}^2_*$, qu'on notera P, et qui rende compte de l'expérience décrite ci-dessus.

On note $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_{(r,b)})_{(r,b)\in\mathbb{N}^2_*}, X = (X_n)_{n\geqslant 0} = (R_n, B_n)_{n\geqslant 0})$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur $\mathbb{N}^2_*$. Ainsi, à chaque instant $n \geqslant 0$, R_n et B_n sont respectivement le nombre de boules rouges et le nombre de boules bleues dans la boîte.

2. a. La chaîne de Markov X est-elle irréductible sur $\mathbb{N}^2_*$? Quels sont ses états récurrents ? Ses états transients ?

b. La chaîne de Markov X admet-elle une mesure invariante ?

On fixe désormais un élément (r, b) de $\mathbb{N}^2_*$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$M_n = \frac{R_n}{r + b + n},$$

dont on observera que c'est la proportion de boules rouges dans la boîte au temps n.

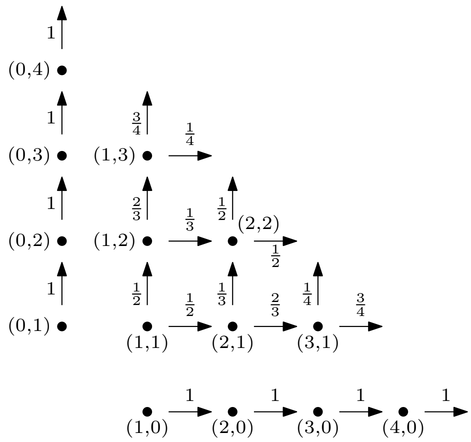
3. a. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{(r,b)}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n]$ existe, et la calculer.

b. Que peut-on dire du comportement asymptotique de la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geqslant 0}$ sous $\mathbb{P}_{(r,b)}$?

Solution de l'exercice 2. 1. Le noyau P donné par

$$p((r,b),(r',b')) = \begin{cases} \frac{r}{r+b} & \text{si } (r',b') = (r+1,b) \\ \frac{b}{r+b} & \text{si } (r',b') = (r,b+1) \\ 0 & \text{si } (r',b') \notin \{(r+1,b),(r,b+1)\} \end{cases}$$

correspond à l'expérience décrite. On peut dessiner une partie de ce noyau de transition de la manière suivante :



2. a. D'un état initial sans boule bleue, comme $(1,0)$, on ne pourra atteindre que des états sans boule bleue, c'est-à-dire les états $(r,0)$ pour $r \geqslant 1$. En particulier, on ne pourra par atteindre l'état $(0,1)$. Ainsi

$$\mathbb{P}_{(1,0)}(T_{(0,1)} < \infty) = 0$$

et $G((1,0),(0,1)) = 0$. Ainsi, le noyau P n'est pas irréductible.

Le nombre de boules dans l'urne augmente de 1 à chaque unité de temps, ce qui s'écrit, pour tout $(r,b) \in \mathbb{N}_*^2$,

$$\mathbb{P}_{(r,b)}(\forall n \geqslant 0, R_n + B_n = r + b + n) = 1.$$

En particulier, sous $\mathbb{P}_{(r,b)}$, on ne repasse jamais en (r,b) :

$$\mathbb{P}_{(r,b)}(\exists n \geqslant 1, (R_n, B_n) = (r,b)) \leqslant \mathbb{P}_{(r,b)}(\exists n \geqslant 1, R_n + B_n \neq r + b + n) = 0,$$

donc

$$\mathbb{P}_{(r,b)}(T_{(r,b)} < \infty) = 0$$

ce qui signifie, par définition, que l'état (r,b) est transient. Ainsi, tous les états sont transients pour P, et aucun état n'est récurrent.

► L'observation principale était ici que le nombre de boules augmente strictement à chaque tour, en l'occurrence de 1, si bien que tous les états sont transients.

Un point de détail qui peut vous rapporter des points : quand l'énoncé vous demande explicitement «Quels sont ses états récurrents ? Ses états transients ?», il est certes correct d'écrire

«Tous les états sont transients.»

mais il est encore mieux d'écrire

«Tous les états sont transients. Aucun n'est récurrent.»

puisqu'ainsi vous informez le correcteur que vous savez que tout état est soit transient soit récurrent. Et que si ledit correcteur a prévu, comme c'est souvent le cas, des points pour chaque partie de la question, vous augmentez vos chances de les avoir tous. ◄

b. Cherchons maintenant les mesures invariantes de P. Soit $\mu : \mathbb{N}_*^2 \to [0, \infty[$ une fonction telle que pour tout $(r, b) \in \mathbb{N}_*^2$ on ait

$$\mu((r,b)) = \sum_{(r',b')\in\mathbb{N}_+^2} \mu((r',b'))p((r',b,'),(r,b)). \tag{1}$$

Puisque pour tout (r', b') on a $p((r', b'), (1, 0)) = 0$, on trouve, en écrivant cette relation pour $(r, b) = (1, 0)$,

$$\mu((1,0)) = 0.$$

Pour tout $k \geqslant 2$, la relation (1) écrite pour $(r, b) = (k, 0)$ donne

$$\mu((k,0)) = \mu((k-1,0))$$

ce qui montre, par récurrence, que $\mu((r, 0)) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$.

De même, on a $\mu((0, b)) = 0$ pour tout $b \geqslant 1$.

Étudions maintenant $\mu((r, b))$ pour $r, b \geqslant 1$. Tout d'abord, la relation (1) pour $(r, b) = (1, 1)$ donnc $\mu((1, 1)) = 0$. Montrons par récurrence sur m que pour tout $m \geqslant 2$, pour tous r, b tels que $r, b \geqslant 1$ et $r + b = m$, on a $\mu((r, b)) = 0$.

C'est vrai pour $m = 2$, car dans ce cas $(r, b) = (1, 1)$. Considérons $m \geqslant 3$ et supposons l'égalité démontrée au rang $m-1$. Considérons (r, b) avec $r+b = m$. Alors tous les (r', b') pour lesquels $p((r', b'), (r, b))$ n'est pas nul satisfont $r' + b' = m - 1$, donc, par hypothèse de récurrence, $\mu((r', b')) = 0$. Ainsi, il découle de (1) que $\mu((r, b)) = 0$.

Finalement, μ est identiquement nulle. Ceci montre que P n'admet aucune mesure invariante.

▶ Cette question était sans doute un peu difficile, en tout cas elle a été rarement traitée convenablement — je n'attendais pas une réponse aussi détaillée que celle du corrigé.

Par contre, j'ai lu assez souvent :

«Tous les états sont transients. Il ne peut donc y avoir de mesure invariante.»

L'exemple de la marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}^3$ montre que ce raisonnement est faux. ◀

3. a. Le processus $(R_n, B_n)_{n\geqslant 0}$ est adapté par définition de la chaîne de Markov, si bien que pour tout $n \geqslant 0$, le vecteur aléatoire (R_n, B_n) est $\mathscr{F}_n$-mesurable. Pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire R_n est donc $\mathscr{F}_n$-mesurable, et le processus $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a par construction $0 \leqslant R_n \leqslant r + b + n$, si bien que

$$0 \leqslant M_n \leqslant 1 \quad \mathbb{P}_{(r,b)} - p.s.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire M_n est bornée, donc intégrable par rapport à $\mathbb{P}_{(r,b)}$.

Calculons maintenant, pour tout $n \geqslant 0$, l'espérance conditionnelle de M_{n+1} sachant $\mathscr{F}_n$. On a tout d'abord, par linéarité de l'espérance conditionnelle,

$$(r+b+n+1)\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[R_{n+1}|\mathscr{F}_n].$$

En écrivant

$$R_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{1}_{\{R_{n+1}=k\}}$$

et en utilisant le théorème de convergence monotone, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{1}_{\{R_{n+1}=k\}} \middle| \mathscr{F}_n \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \; \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{R_{n+1}=k\}}|\mathscr{F}_n] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \; \mathbb{P}[R_{n+1} = k|\mathscr{F}_n].
\end{aligned}$$

Puisqu'on travaille sous $\mathbb{P}_{(r,b)}$, on a pour tout $n \geqslant 0$, avec probabilité 1,

$$B_n = r + b + n - R_n.$$

Ainsi, l'événement $\{R_{n+1} = k\}$ est-il égal à l'événement $\{(R_{n+1}, B_{n+1}) = (k, r+b+n-k)\}$. En utilisant la définition du fait que $(R_n, B_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de noyau de transition P, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \; \mathbb{P}[(R_{n+1}, B_{n+1}) = (k, r + b + n - k)|\mathscr{F}_n] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \; p((R_n, B_n), (k, r + b + n - k)).
\end{aligned}$$

Les seules valeurs de k pour lesquelles le terme que l'on somme n'est pas nul sont $k = R_n$ et $k = R_n + 1$. On trouve, en écrivant explicitement ces valeurs non nulles du noyau de transition, puis en exprimant tout en fonction de R_n,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= R_n p((R_n, B_n), (R_n, B_n + 1)) + (R_n + 1)p((R_n, B_n), (R_n + 1, B_n)) \\
&= R_n \frac{B_n}{R_n + B_n} + (R_n + 1) \frac{R_n}{R_n + B_n} \\
&= R_n \frac{r + b + n - R_n}{r + b + n} + (R_n + 1) \frac{R_n}{r + b + n} \\
&= R_n \frac{r + b + n + 1}{r + b + n} \\
&= (r + b + n + 1)M_n.
\end{aligned}$$

Finalement, nous avons démontré que $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] = M_n$, ce qui achève la démonstration du fait que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_{(r,b)}$ par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

b. La martingale $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée par 1 en valeur absolue. Elle est donc bornée dans L^1, ce qui entraîne qu'elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire M_∞ qui appartient à L^1.

On peut dire mieux. En effet, la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^p pour tout $p \geqslant 1$, si bien que M_∞ appartient à L^p pour tout $p \geqslant 1$ et que la convergence de M_n vers M_∞ a lieu dans L^p pour tout $p \geqslant 1$. En particulier, on a, en écrivant la convergence des moyennes,

$$\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0] = \frac{r}{r+b}.$$

► Les étudiants qui se sont contentés de parler de la convergence presque sûre (ce qui était déjà bien) n'ont pas eu tous les points à cette question. ◄

3. Sur un espace d'états E, on considère une chaîne de Markov qu'on suppose récurrente $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, X = (X_n)_{n\geqslant 0})$, de matrice de transition P. Pour tout $x \in E$, on note $\tau_x = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = x\}$ le premier temps de passage en x.

On fixe une fois pour toutes deux éléments distincts x et y de E et on pose, pour tout $z \in E$,

$$f(z) = \mathbb{P}_z(\tau_x < \tau_y).$$

1. Calculer $f(x)$ et $f(y)$. Calculer $f(w)$ pour tout élément w de E qui n'est pas à la fois dans la classe de récurrence de x et dans la classe de récurrence de y.

2. Montrer que pour tout z qui n'est ni égal à x ni égal à y, on a

$$f(z) = \sum_{w\in E} p(z,w)f(w).$$

3. On considère un réel $p \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right[$ et on pose $q = 1-p$. On pose $E = \mathbb{N}$. On définit la matrice de transition P sur E en posant $p(0,1) = 1$ et, pour tout $i \geqslant 1$, $p(i,i+1) = p$ et $p(i,i-1) = q$. On choisit enfin un entier $N \geqslant 2$ et on pose $x = N$ et $y = 0$.

Montrer que la chaîne de Markov de matrice de transition P sur $\mathbb{N}$ est irréductible et récurrente et calculer la fonction f dans ce cas.

Solution de l'exercice 3.

1. On a $\mathbb{P}_x(\tau_x = 0) = 1$ et $\mathbb{P}_x(\tau_y = 0) = 0$, si bien que $f(x) = \mathbb{P}_x(0 < \tau_y) = 1$. De même, on a $\mathbb{P}_x(\tau_y = 0) = 0$ et $\mathbb{P}_y(\tau_y = 0) = 1$, donc $f(y) = 0$.

Soit w un élément de E qui n'est pas à la fois dans la classe de récurrence de x et dans celle de y. Deux cas peuvent se présenter.

a) w est dans la classe de x mais pas dans celle de y. Dans ce cas, $\mathbb{P}_w(\tau_y = \infty) = 1$ et $\mathbb{P}_w(\tau_x < \infty) = 1$, donc $f(w) = 1$.

b) w n'est pas dans la classe x. Dans ce cas, τ_x est infini $\mathbb{P}_w$-presque sûrement, si bien que $f(w) = 0$. Notons que si w n'est ni dans la classe de x ni dans celle de y, on a $\mathbb{P}_w(\tau_x = \tau_y = \infty) = 1$ et $f(w) = 0$.

Si x et y ne sont pas dans la même classe de récurrence, cela suffit à calculer la fonction f : elle vaut 1 sur la classe de x et 0 ailleurs.

Si x et y sont dans la même classe de récurrence, cela nous donne la valeur de f sur l'union des autres classes de récurrence, en l'occurrence 0.

▶ Le principal problème dans cette question a été la compréhension de ce que signifie n'être pas à la fois dans la classe de récurrence de x et dans la classe de récurrence de y. En notant R_x et R_y ces classes, cela signifiait n'être pas dans $R_x \cap R_y$, ensemble qui est vide si x et y ne communiquaient pas. ◀

2. On va appliquer la propriété de Markov au temps 1. Pour cela, on peut introduire les versions canoniques de τ_x et τ_y, c'est-à-dire les temps d'arrêt $\widehat{\tau}_x$ et $\widehat{\tau}_y$ sur $E^{\mathbb{N}}$ définis par

$$\widehat{\tau}_x(\omega) = \inf\{n \geqslant 0 : \omega_n = x\} \text{ et } \widehat{\tau}_y(\omega) = \inf\{n \geqslant 0 : \omega_n = y\}.$$

On a donc $\tau_x = \widehat{\tau}_x(X)$ et $\tau_y = \widehat{\tau}_y(X)$. Il faut maintenant comprendre comment ces temps d'arrêt se comportent par rapport au décalage de 1. La relation fondamentale est la suivante :

$$\widehat{\tau}_x(X) = \mathbb{1}_{\{X_0 \neq x\}}(1 + \widehat{\tau}_x(\theta_1(X))),$$

et son analogue pour y :

$$\widehat{\tau}_y(X) = \mathbb{1}_{\{X_0 \neq y\}}(1 + \widehat{\tau}_y(\theta_1(X))).$$

Considérons $z \notin \{x, y\}$. Sous $\mathbb{P}_z$, on a donc presque sûrement

$$\widehat{\tau}_x(X) = 1 + \widehat{\tau}_x(\theta_1(X)) \text{ et } \widehat{\tau}_y(X) = 1 + \widehat{\tau}_y(\theta_1(X)),$$

si bien que

$$\begin{aligned}
f(z) &= \mathbb{P}_z(1 + \widehat{\tau}_x(\theta_1(X)) < 1 + \widehat{\tau}_y(\theta_1(X))) \\
&= \mathbb{P}_z(\widehat{\tau}_x(\theta_1(X)) < \widehat{\tau}_y(\theta_1(X))) \\
&= \mathbb{E}_z[\mathbb{1}_{\{\widehat{\tau}_x(\theta_1(X)) < \widehat{\tau}_y(\theta_1(X))\}}] \\
&= \mathbb{E}_z[\mathbb{E}_z[\mathbb{1}_{\{\widehat{\tau}_x(\theta_1(X)) < \widehat{\tau}_y(\theta_1(X))\}}]|\mathscr{F}_1] \\
&= \mathbb{E}_z[\mathbb{E}_{X_1}[\mathbb{1}_{\{\widehat{\tau}_x(X) < \widehat{\tau}_y(X)\}}]] \\
&= \mathbb{E}_z[\mathbb{P}_{X_1}(\tau_x < \tau_y)] \\
&= \mathbb{E}_z[f(X_1)] \\
&= \sum_{w \in E} p(z, w) f(w).
\end{aligned}$$

3. La chaîne X est irréductible et admet la mesure réversible μ définie par

$$\mu(0) = p \text{ et pour tout } i \geqslant 1, \mu(i) = \left(\frac{p}{q}\right)^i.$$

Puisque $p < \frac{1}{2} < q$, la mesure μ est finie, donc la chaîne admet une mesure de probabilité invariante : elle est donc récurrente.

La fonction f satisfait $f(0) = 0$ et $f(N) = 1$. Partant d'un entier supérieur à N, la probabilité de passer en N avant de passer en 0 vaut 1, puisque la chaîne fait des pas de 1. Ainsi, $f(i) = 1$ pour tout $i \geqslant N$.

Il reste à calculer $f(i)$ pour i compris entre 1 et $N-1$. Pour cela, on écrit la relation qu'on a démontrée à la question précédente :

$$\forall i \in \{1, \dots, N-1\}, \; f(i) = pf(i-1) + qf(i+1). \tag{2}$$

Commençons par observer qu'il existe au plus une fonction $g : \{0, \dots, N\} \to \mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$, $g(N) = 1$ et qui satisfasse

$$\forall i \in \{1, \dots, N-1\}, \; g(i) = pg(i-1) + qg(i+1). \tag{3}$$

En effet, supposons qu'il en existe deux, qu'on note g et g'. Alors la fonction $h = g - g'$ satisfait $h(0) = h(N) = 0$, et la relation (3). Considérons un $i \in \{1, \dots, N-1\}$ tel que $|h(i)| = \max\{|h(j)| : j \in \{0, \dots, N\}\}$. Si $i = 0$ ou $i = N$, alors la fonction h est nulle. Si i appartient à $\{1, \dots, N-1\}$, alors la relation (3) montre qu'on doit avoir $h(i-1) = h(i) = h(i+1)$. En itérant ce raisonnement, on voit que $h(i-2) = h(i-1) = h(i)$, et finalement que h est constante, donc identiquement nulle.

Il nous suffit donc de trouver une fonction f telle que $f(0) = 0$, $f(N) = 1$ et qui satisfasse (2). Pour résoudre cette récurrence linéaire d'ordre 2, on cherche les racines du polynôme $R(t) = qt^2 - t + p$. On trouve 1 et $\frac{p}{q}$. On cherche donc f sous la forme

$$f(i) = a + b\left(\frac{p}{q}\right)^i .$$

et on va faire l'hypothèse que cette écriture reste valide en $i = 0$ et $i = N$. Ceci nous permet de déterminer les constantes a et b, grâce aux relations $f(0) = 0$ et $f(N) = 1$. On trouve

$$a + b = 0 \text{ et } a + b\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1,$$

d'où on tire les valeurs de a et b, et finalement

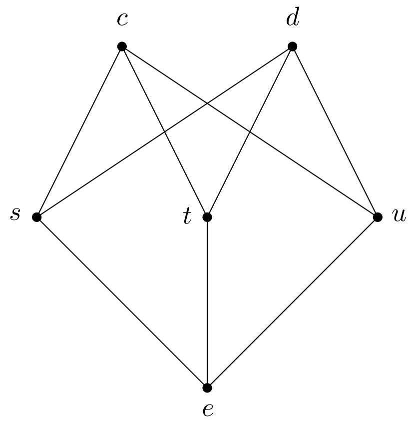
$$\boxed{f(i) = \frac{q^N - p^i q^{N-i}}{q^N - p^N}}$$

Cette fonction a les valeurs voulues en 0 et en N et satisfait la relation de récurrence linéaire : c'est donc la fonction f.

► L'irréductibilité de la chaîne était facile à établir, et la plupart des copies l'ont fait. La récurrence était par contre une question plus difficile : quelques copies l'ont établie comme conséquence de l'existence d'une mesure de probabilités invariante. Certains ont essayé de calculer $G(0,0)$, ce qui est faisable, mais n'est pas facile, et n'a été réussi par personne.

Le calcul de f, qui aurait été plus attendu dans un examen sur les suites définies par récurrence (mais les techniques apprises en licence sont réputées connues au-delà du semestre où elles sont enseignées !), était un peu pénible, et n'a été abordé presque par personne. ◄

4. On considère la marche au hasard sur le graphe suivant :



qu'on étudie comme une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{e, s, t, u, c, d\}$.

1. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?

2. Déterminer toutes les mesures invariantes de cette chaîne de Markov.

3. Entre deux visites en t, combien de fois la chaîne de Markov passe-t-elle, en moyenne, en c ?

4. Partant de u, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à revenir en u ?

5. Partant de e, quelle proportion du temps la chaîne passe-t-elle, asymptotiquement, dans le sous-ensemble $\{c, d\}$ de E ?

6. Partant de e, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à atteindre d ?

Solution de l'exercice 4. 1. Puisque le graphe sur lequel on fait une marche au hasard est connexe, chaque état mène à chaque autre pour cette chaîne de Markov, qui est donc irréductible. Puisque l'espace d'états est fini, la chaîne a au moins un état récurrent, et puisque la chaîne est irréductible, tous les états sont récurrents.

2. La mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible, donc invariante pour la marche au hasard. Dans le graphe que nous considérons, chaque sommet a trois voisins. Ainsi, la mesure qui à chaque sommet associe la masse 3 est invariante.

Puisque la chaîne est irréductible et récurrente, elle admet, à une constante multiplicative près, une unique mesure invariante. Les mesures invariantes sont exactement les mesures

$$\boxed{\alpha(\delta_e + \delta_s + \delta_t + \delta_u + \delta_c + \delta_d), \quad \alpha > 0}$$

► Contrairement à l'an dernier, le nombre d'étudiants qui se sont lancés dans le résolution d'un système 6×6 est minuscule. Les mots *«mesure réversible»* sont apparus dans presque toutes les copies.

Par contre, je n'ai que très rarement trouvé une réponse satisfaisante à la question telle qu'elle était posée. J'ai souvent lu quelque chose comme
«La mesure $\mu = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$ est invariante. Toutes les mesures invariantes lui sont proportionnelles.»
À proprement parler, ceci ne répond pas à la question : certes, toutes les mesures invariantes sont proportionnelles à cette mesure μ, mais toutes les mesures proportionnelles à μ sont-elles invariantes ?

De manière plus anecdotique, j'ai vu un nombre significatif d'erreurs dans le comptage du nombre de voisins de chaque sommet. ◄

3. Notons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche au hasard sur le graphe. La mesure μ donnée par

$$\mu(x) = \mathbb{E}_t\left[\sum_{i=0}^{T_t-1} \mathbb{1}_{\{X_i=x\}}\right]$$

est une mesure invariante, et elle vérifie $\mu(t) = 1$. C'est donc la mesure de comptage sur l'espace d'états $E = \{e, s, t, u, c, d\}$. L'égalité

$$\mu(c) = 1$$

signifie qu'entre deux visites en t, la chaîne passe, en moyenne, une fois en c.

4. Le temps moyen de retour en u est égal à l'inverse de la masse que donne à u l'unique mesure de probabilité invariante, que nous noterons π. Cette probabilité donne la masse $\frac{1}{6}$ à chaque sommet du graphe. Ainsi,

$$\mathbb{E}_u[T_u] = \frac{1}{\pi(u)} = 6.$$

Partant de u, la chaîne met donc, en moyenne, un temps 6 à y revenir.

▶ J'ai lu ici plus souvent qu'à son tour l'assertion

$$\mathbb{E}_u[T_u] = \frac{18}{3}$$

qui, bien que correcte, laisse un goût d'inachevé. ◀

5. Le théorème ergodique nous indique que, $\mathbb{P}_e$ presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_i=c\}} = \pi(c) = \frac{1}{6}$$

et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_i=d\}} = \pi(d) = \frac{1}{6}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_i\in\{c,d\}\}} = \pi(\{c,d\}) = \frac{1}{3}.$$

Partant de e, la chaîne passe donc, asymptotiquement, un tiers du temps dans le sous-ensemble $\{c, d\}$.

▶ Certains ont pensé ne pas pouvoir appliquer le théorème ergodique parce que la chaîne est de période 2 (elle l'est en effet). D'autres ont vérifié alors que ce n'était pas nécessaire, et surtout alors que ce n'est pas vrai, qu'elle est apériodique (elle ne l'est pas). Pour appliquer le théorème ergodique, il n'est pas nécessaire de vérifier l'apériodicité de la chaîne. ◀

6. Notons $\tau_d = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = d\}$ le premier temps d'atteinte de d et notons, pour tout sommet x,

$$h(x) = \mathbb{E}_x[\tau_d].$$

On cherche à calculer $h(e)$ mais comme à la question précédente, on va calculer $h(x)$ pour tous les sommets x. En effet, nous savons que $h(d) = 0$ et la propriété de Markov nous donne, pour tout sommet x autre que d,

$$h(x) = 1 + \mathbb{E}_x[h(X_1)].$$

On a donc les équations

$$\begin{aligned} h(d) &= 0 \\ h(s) = h(t) = h(u) &= 1 + \frac{1}{3}(h(c) + h(e)) \\ h(c) &= 1 + \frac{1}{3}(h(s) + h(t) + h(u)) \\ h(e) &= 1 + \frac{1}{3}(h(s) + h(t) + h(u)) \end{aligned}$$

Notons $\alpha = h(s) = h(t) = h(u)$, $\beta = h(c) = h(e)$. On a donc

$$\alpha = 1 + \frac{2}{3}\beta \text{ et } \beta = 1 + \alpha,$$

d'où on tire $\alpha = 5$ et $\beta = 6$.

Ainsi, $\mathbb{E}_e[\tau_d] = 6$.

——— Fin du sujet ———