Université Pierre et Marie Curie — 2016 – 2017

Probabilités approfondies – 4M011 — 17 mai 2017

Examen - Deuxième session

L'épreuve dure trois heures.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Les quatre exercices sont indépendants.

1. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires positives qui est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout $n \geqslant 0$, on note

$$M_n = \max(X_0, \dots, X_n).$$

1. Soient $n \geqslant 0$ un entier et $a \geqslant 0$ un réel. Vérifier l'égalité

$$\{M_n \geqslant a\} = \{X_0 \geqslant a\} \sqcup \bigsqcup_{k=0}^{n-1} (\{M_k < a\} \cap \{X_{k+1} \geqslant a\}),$$

où les unions sont disjointes, et donner une démonstration de l'inégalité

$$a\mathbb{P}(M_n \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{M_n \geqslant a\}}].$$

2. Pour tout réel $y > 0$, on note $(\log y)^+$ la partie positive du logarithme népérien de y, c'est-à-dire

$$(\log y)^+ = \max(\log y, 0) = \log(\max(y, 1)).$$

On étend cette définition en posant $(\log 0)^+ = 0$.

Montrer que pour tous réels $x, y \geqslant 0$, on a l'inégalité

$$x(\log y)^+ \leqslant x(\log x)^+ + \frac{y}{e}.$$

3. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z on a

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant a)\, da.$$

En déduire que $\mathbb{E}[M_n] \leqslant 1 + \mathbb{E}[X_n(\log M_n)^+]$ puis que

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant \frac{e}{e-1} \left(1 + \mathbb{E}[X_n(\log X_n)^+]\right).$$

4. Que peut-on dire d'une martingale $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\sup\{\mathbb{E}[|Z_n|(\log |Z_n|)^+] : n \geqslant 0\} < +\infty \quad ?$$

Solution de l'exercice 1.

1. On obtient l'égalité ensembliste annoncée en décomposant l'événement où $\max(X_0, \ldots, X_n)$ dépasse a suivant la valeur du plus petit entier $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que X_k dépasse a. Plus précisément, posons $T = \inf\{k \geqslant 0 : X_k \geqslant a\}$. On a

$$\begin{aligned}
\{M_n \geqslant a\} &= \{T \leqslant n\} \\
&= \bigsqcup_{k=0}^{n} \{T = k\} \\
&= \{T = 0\} \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n} \{T = k\} \\
&= \{X_0 \geqslant a\} \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n} \{X_0 < a, \ldots, X_{k-1} < a, X_k \geqslant a\} \\
&= \{X_0 \geqslant a\} \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n} \{M_{k-1} < a, X_k \geqslant a\} \\
&= \{X_0 \geqslant a\} \sqcup \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \{M_k < a, X_{k+1} \geqslant a\}.
\end{aligned}$$

On pouvait aussi procéder par récurrence sur n. Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit

$$\{M_0 \geqslant a\} = \{X_0 \geqslant a\},$$

qui est vraie car $M_0 = X_0$. Suppons l'égalité vraie au rang n (c'est-à-dire telle qu'elle est écrite dans l'énoncé) et montrons-la au rang suivant. On a

$$\begin{aligned}
\{M_{n+1} \geqslant a\} &= \{M_{n+1} \geqslant a, M_n \geqslant a\} \sqcup \{M_{n+1} \geqslant a, M_n < a\} \\
&= \{M_n \geqslant a\} \sqcup \{X_{n+1} \geqslant a, M_n < a\}
\end{aligned}$$

et l'hypthèse de récurrence donne le résultat souhaité.

L'inégalité qui suit est une inégalité de Doob démontrée dans le cours. La démonstration suggérée par la première partie de la question était la suivante. Commençons par écrire

$$\begin{aligned}
a\mathbb{P}(M_n \geqslant a) &= a\mathbb{P}(X_0 \geqslant a) + \sum_{k=0}^{n-1} a\mathbb{P}(M_k < a, X_{k+1} \geqslant a) \\
&\leqslant \mathbb{E}[X_0 \mathbb{1}_{\{X_0 \geqslant a\}}] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_{k+1} \mathbb{1}_{\{X_{k+1} \geqslant a, M_k < a\}}].
\end{aligned}$$

Puisque $(X_n)_{n \geqslant 0}$, on a pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ et pour tout événement $A \in \mathscr{F}_k$ l'inégalité

$$\mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_A] \leqslant \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_A].$$

On a donc

$$\begin{aligned}
a\mathbb{P}(M_n \geqslant a) &\leqslant \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{X_0 \geqslant a\}}] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{X_{k+1} \geqslant a, M_k < a\}}] \\
&= \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{M_n \geqslant a\}}].
\end{aligned}$$

J'ai trouvé dans un certain nombre de copies la démonstration (correcte, et rémunérée comme telle) de cette inégalité qui utilise le théorème d'arrêt. L'avantage de celle donnée ci-dessus est d'être plus élémentaire : elle n'utilise rien de plus que la définition d'une surmartingale.

2. Je ne connais pas, et n'ai pas trouvé dans les copies, de démonstration en deux lignes de cette inégalité. Il semble naturel de commencer par éliminer les cas "particuliers".

Tout d'abord, pour $y \in [0,1]$, l'inégalité est vraie par KO puisqu'alors elle se réduit à $0 \leqslant x(\log x)^+ + \frac{y}{e}$, qui est évidemment vraie.

Supposons désormais $y > 1$. Pour $x \in [0,1]$, l'inégalité s'écrit $x \log y \leqslant \frac{y}{e}$. Ici, une petite étude de fonction semble indispensable et montre que le minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $y \mapsto \frac{y}{e} - \log y$ est atteint en e et vaut 0, si bien que[1] $\frac{y}{e} \geqslant \log y \geqslant x \log y$.

Supposons désormais $x > 1$. Le minimum de la fonction $y \mapsto \frac{y}{e} - x \log y$ est atteint en ex et vaut $-x \log x$, c'est-à-dire que $\frac{y}{e} - x \log y + x \log x \geqslant 0$, ce qu'on voulait démontrer.

3. C'est une application du théorème de Fubini :

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(Z \geqslant a)\, da = \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z \geqslant a\}}]\, da = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{a \leqslant Z\}}\, da\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^Z da\right] = \mathbb{E}[Z].$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(M_n \geqslant a)\, da \\
&= \int_0^1 \mathbb{P}(M_n \geqslant a)\, da + \int_1^\infty \mathbb{P}(M_n \geqslant a)\, da \\
&\leqslant 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}(M_n \geqslant a)\, da \\
&\leqslant 1 + \int_1^\infty \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{M_n \geqslant a\}}] \frac{da}{a} \\
&= 1 + \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\{M_n \geqslant 1\}} \int_1^{M_n} \frac{da}{a}\right] \\
&= 1 + \mathbb{E}\left[X_n (\log M_n)^+\right].
\end{aligned}$$

La passage de la première ligne à la deuxième était ici un peu délicat : il fallait penser à couper l'intégrale avant d'utiliser la majoration de la probabilité, sous peine d'obtenir $\int_0^{M_n} \frac{da}{a}$ et d'aboutir à l'inégalité, certes juste, $\mathbb{E}[M_n] \leqslant +\infty$. Dans beaucoup, beaucoup trop, de copies, j'ai lu $\int_0^{M_n} \frac{da}{a}$ puis, une ou deux lignes plus bas, comme par magie, $1+\mathbb{E}\left[X_n(\log M_n)^+\right]$. Faire une telle erreur par mégarde est assez grave : vous devriez savoir intégrer $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur un intervalle de $\mathbb{R}^+$, même avec le stress d'un examen. La faire en connaissance de cause et en se disant que ça passera peut-être n'est pas une bonne idée : le correcteur sait où sont les passages obligés des calculs qu'il vous demande de faire et, particulièrement dans des questions où le résultat est donné, il ne vous pardonnera pas ce genre de blague.

1. Notons au passage que l'inégalité $e \log t \leqslant t$, vraie pour tout réel $t > 0$, peut se comprendre comme une inégalité de convexité, puisque le graphe de la fonction $t \mapsto \frac{t}{e}$ est la tangente au graphe de la fonction $t \mapsto \log t$ au point $(e, 1)$.

Arrivés à ce point, et en utilisant l'inégalité démontrée à la question précédente, on trouve

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant 1 + \mathbb{E}[X_n(\log X_n)^+] + \frac{1}{e}\mathbb{E}[M_n],$$

d'où on tire l'inégalité souhaitée.

4. Supposons $\sup\{\mathbb{E}[|Z_n|(\log|Z_n|)^+] : n \geqslant 0\} < +\infty$. Puisque pour tout $x \geqslant 0$ on a par exemple $x \leqslant e + x(\log x)^+$ (comme on le vérifie en distinguant les cas $x \leqslant e$ et $x \geqslant e$), la martingale $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^1. Elle converge donc presque sûrement.

L'hypothèse entraîne aussi (par le critère de La Vallée Poussin) que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est uniformément intégrable, si bien qu'elle converge également dans L^1.

Sans connaître ce critère (que je n'ai pas expliqué en cours), on peut également dire que, d'après l'inégalité qu'on vient de démontrer, la suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est dominée dans L^1, si bien qu'elle converge dans L^1. Sa limite presque sûre et dans L^1 est une variable aléatoire Z_∞ qui, d'après le lemme de Fatou, satisfait

$$\mathbb{E}[|Z_\infty|] \leqslant \sup\{\mathbb{E}[|Z_n|(\log|Z_n|)^+] : n \geqslant 0\}.$$

2. Dans un pays imaginaire, la désignation du gouvernement fonctionne de la manière suivante. L'ensemble des personnes susceptibles d'être ministres est un petit sous-ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ de la population du pays, donné une fois pour toutes. Sur l'ensemble X muni de la tribu de toutes ses parties est donnée une mesure de probabilité α et on note, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\alpha_i = \alpha(\{x_i\}).$$

Le premier jour de chaque mois, on tire un individu dans l'ensemble X sous la loi α. Si cet individu n'était pas ministre pendant le mois précédent, on l'ajoute à l'ensemble des ministres. Si au contraire l'individu était déjà ministre pendant le mois précédent, il sort de l'ensemble des ministres.

Autrement dit, dans notre pays imaginaire, l'ensemble des ministres est une chaîne de Markov dont l'espace d'états est l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ de toutes les parties de X et dont la matrice de transition Q est la suivante : pour toutes parties A et B de X, on a

$$Q_{A,B} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x_i\}, \\ 0 & \text{si } (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ n'est pas un singleton.} \end{cases}$$

On considère une chaîne de Markov $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, (\mathbb{P}_A)_{A\in\mathscr{P}(X)}, (M_n)_{n\geqslant 0})$ d'espace d'états $\mathscr{P}(X)$ et de matrice de transition Q.

1. a. Montrer que sous la condition

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\},\ \alpha_i > 0, \tag{I}$$

la chaîne est irréductible et récurrente.

b. Déterminer, lorsque la condition (I) n'est pas satisfaite, le nombre de classes de récurrence de la chaîne.

On suppose désormais la condition (I) satisfaite.

2. Déterminer toutes les mesures de probabilités invariantes de la chaîne.

3. On fixe une fois pour toutes un $A \in \mathscr{P}(X)$ tel que $x_1 \notin A$.

On définit $T = \inf\{n \geqslant 0 : x_1 \in M_n\}$, le premier temps auquel l'individu x_1 devient ministre.

a. Montrer que T est un temps d'arrêt.

b. Calculer la loi et l'espérance de T sous $\mathbb{P}_A$.

4. On pose $S = \inf\{n \geqslant T : x_1 \notin M_n\}$. Montrer que sous $\mathbb{P}_A$, les variables aléatoires $S - T$ et T sont indépendantes et de même loi.

5. Déterminer, sous $\mathbb{P}_A$, la proportion asymptotique du temps pendant laquelle l'individu x_1 est ministre, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{x_1 \in M_k\}}.$$

On commencera par dire pourquoi cette limite existe et en quel sens.

6. Au vu des résultats des deux questions précédentes, comment la valeur de α_1 influence-t-elle la vie politique de l'individu x_1 ?

Solution de l'exercice 2. 1. a. Considérons une partie $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ de X. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(X_0 = A, X_1 = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}\}, X_2 = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2}}\}, \dots \\ \dots, X_{n-1} = \{x_{i_1}\}, X_n = \varnothing) = \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n} > 0\end{aligned}$$

si bien que A mène à l'ensemble vide. De même, l'ensemble vide mène à A.

Ainsi, tout état mène à l'ensemble vide et l'ensemble vide mène à tout état. La chaîne est donc irréductible.

Comme son espace d'états est fini, elle est récurrente.

b. Notons $Y = \{x \in X : \alpha(\{x\}) = 0\}$. Au cours de son évolution, la chaîne ne peut ni perdre ni acquérir un élément de Y. Ainsi, deux éléments de $\mathscr{P}(X)$ communiquent si et seulement si leur intersection avec Y est égale.

Le nombre de classes de récurrence est donc 2^m, où m est le nombre de singletons de masse nulle dans X.

2. Puisque la chaîne est irréductible et récurrente, elle admet une unique mesure de probabilité invariante. Pour la déterminer, on cherche une mesure réversible $(\pi_A)_{A\in\mathscr{P}(X)}$. Pour deux parties A et B qui ne diffèrent que par la présence ou l'absence d'un élément x_i, on doit avoir

$$\pi_A \alpha_i = \pi_A Q_{AB} = \pi_B Q_{BA} = \pi_B \alpha_i,$$

c'est-à-dire $\pi_A = \pi_B$. La seule mesure invariante possible est donc la mesure uniforme, et le calcul que nous venons de faire montre que la mesure uniforme est réversible. La mesure uniforme sur $\mathscr{P}(X)$ est donc l'unique mesure invariante de la chaîne. Concrètement, cette mesure donne à chaque élément A de $\mathscr{P}(X)$ la masse 2^{-N}.

3. a. Le temps aléatoire T est le premier temps d'entrée dans la partie de $\mathscr{P}(X)$ formée de toutes les parties de X qui contiennent x_1. C'est donc un temps d'arrêt.

b. On peut construire la chaîne de Markov en prenant une suite i.i.d. $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de loi α et en posant

$$M_n = M_0 \dotplus \{\xi_1\} \dotplus \{\xi_2\} \dots \dotplus \{\xi_n\},$$

où $\dotplus$ désigne la différence symétrique.

Si $x_1 \in A$, alors $T = 0$. Supposons maintenant $x_1 \notin A$. Le temps T est alors le premier temps où la suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ prend la valeur x_1. On a donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(T = n) = (1 - \alpha_1)^{n-1} \alpha_1.$$

Le temps T suit donc une loi géométrique de paramètre α_1 et son espérance vaut

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_1)^{n-1} = \frac{1}{\alpha_1}.$$

4. On applique la propriété de Markov forte au temps T. Définissons, sur l'espace canonique, $\widehat{S}((A_n)_{n \geqslant 0}) = \inf\{n \geqslant 0 : x_1 \notin A_n\}$. Alors on a $S - T = \widehat{S}(\theta_T(X))$. Soient f et g deux fonctions bornées sur $\mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_A[f(T)g(S - T)] &= \mathbb{E}_A[\mathbb{E}_A[f(T)g(S - T)|\mathscr{F}_T]] \\
&= \mathbb{E}_A[f(T)\mathbb{E}_A[g(\widehat{S}(\theta_T(X)))|\mathscr{F}_T]] \\
&= \mathbb{E}_A[f(T)\mathbb{E}_{M_T}[g(\widehat{S}(X))]].
\end{aligned}$$

Pour toute partie B de X qui contient x_1, $\widehat{S}(X)$ a sous $\mathbb{P}_B$ la même loi géométrique de paramètre α_1 que nous avons décrite ci-dessus. Puisque M_T contient x_1 avec probabilité 1, l'espérance $\mathbb{E}_{M_T}[g(\widehat{S}(X))]$ est égale à $\mathbb{E}_A[g(T)]$ et

$$\mathbb{E}_A[f(T)g(S - T)] = \mathbb{E}_A[f(T)]\mathbb{E}_A[g(S - T)],$$

ce qu'on souhaitait démontrer.

5. Le théorème ergodique assure que la limite considérée existe presque sûrement et vaut

$$\int_{\mathscr{P}(X)} \mathbb{1}_{\{x_1 \in A\}} \, d\pi(A) = \frac{1}{2^{|X|}} |\{A \subset X : x_1 \in A\}| = \frac{1}{2}.$$

6. Quelle que soit la valeur de α_1, l'individu 1 est ministre, en moyenne, la moitié du temps. Toutefois, si α_1 est très petit, il alterne de longues périodes où il est ministre avec de longues périodes où il ne l'est pas, alors que si α_1 est très proche de 1, il devient ministre et cesse de l'être très fréquemment.

3. Soit $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On suppose qu'il existe un réel $t > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{t\xi_1}] = 1$.

1. Si elle existe, que peut-on dire de l'espérance de ξ_1 ?

2. Soit $x \geqslant 0$ un réel. Montrer que

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 \text{ tel que } \xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x) \leqslant e^{-tx}.$$

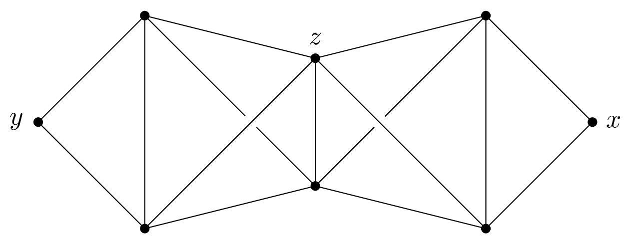
Solution de l'exercice 3. Posons $M_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $M_n = e^{t\xi_1} \dots e^{t\xi_n}$. La suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale (positive) à laquelle nous pouvons appliquer l'inégalité maximale : pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(\max(M_0, \dots, M_n) \geqslant e^{tx}) \leqslant e^{-tx}\mathbb{E}[M_n] = e^{-tx}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 \text{ tel que } \xi_1 + \dots + \xi_n \geqslant x) &= 1 - \mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 \text{ tel que } e^{t(\xi_1+\dots+\xi_n)} \geqslant e^{tx}) \\
&= \mathbb{P}(\forall n \geqslant 0, M_n \leqslant e^{tx}) \\
&= \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{n=0}^{\infty} \max(M_0, \dots, M_n) \leqslant e^{tx}\Bigg) \\
&= \lim_{n\to\infty}\!\downarrow \mathbb{P}(\max(M_0, \dots, M_n) \leqslant e^{tx}) \\
&\leqslant e^{-tx}.
\end{aligned}$$

4. On considère, sur le graphe représenté ci-dessous, une marche au hasard qui, à chaque pas, va vers un sommet choisi uniformément parmi tous les voisins du sommet où elle se trouve.



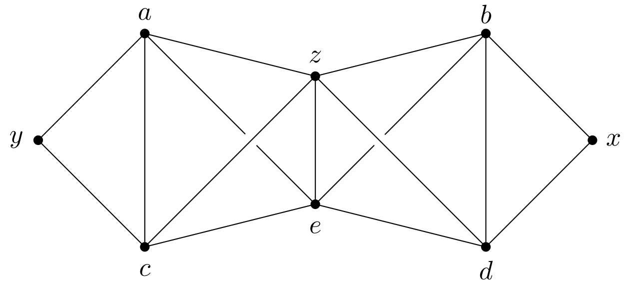
1. Déterminer toutes les mesures de probabilité invariantes pour cette marche au hasard.

2. Partant du sommet x, quel est le temps moyen que met la marche pour revenir au sommet x ?

3. Entre deux visites au sommet x, combien de fois la marche visite-t-elle, en moyenne, le sommet z ?

4. Entre deux visites successives en x, quelle est la probabilité que la marche visite y ?

Solution de l'exercice 4. Nommons tous les sommets du graphe :



1. Le graphe étant connexe, la marche au hasard est irréductible et puisque le graphe est fini, elle est récurrente. Elle admet donc une unique mesure de probabilité invariante que nous noterons π.

On vérifie que la mesure qui à chaque sommet associe son nombre de voisins est réversible, donc invariante. Il suffit de la normaliser pour trouver π. On a donc

$$\pi_x = \pi_y = \frac{1}{15},\ \pi_a = \pi_b = \pi_c = \pi_d = \frac{2}{15},\ \pi_z = \pi_e = \frac{1}{6}.$$

2. Le temps de retour moyen en x est la masse totale de la mesure invariante qui donne la masse 1 à x. Il vaut donc

$$\mathbb{E}_x[T_x] = \frac{1}{\pi_x} = 15.$$

3. Le nombre moyen de visites au sommet z entre deux visites au sommet x est la masse de z pour la mesure invariante qui donne la masse 1 à x. Il vaut donc

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbb{1}_{\{X_n=z\}}\right] = \frac{\pi_z}{\pi_x} = \frac{5}{2}.$$

4. Notons d'une part $T_x = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = x\}$ le premier temps de retour en x et d'autre part $T'_y = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = y\}$ le premier temps de passage en y. On souhaite calculer $\mathbb{P}_x(T'_y < T_x)$. Posons, pour tout sommet v,

$$f(v) = \mathbb{P}_v(T'_y < T_x).$$

Nous savons que $f(y) = 1$ et une application de la propriété de Markov simple au temps 1 montre que pour tout sommet v,

$$f(v) = \sum_{w \neq x} p(v, w) f(w).$$

Par ailleurs, la symétrie du graphe par rapport à l'axe horizontal du dessin montre que $f(a) = f(c)$, $f(z) = f(e)$ et $f(b) = f(d)$. Notons respectivement $\alpha = f(a)$, $\beta = f(z)$ et $\gamma = f(b)$ ces trois probabilités. Nous avons entre α, β, γ les relations

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{4}(1 + \alpha + 2\beta),\\
\beta &= \frac{1}{5}(2\alpha + \beta + 2\gamma),\\
\gamma &= \frac{1}{4}(2\beta + \gamma)
\end{aligned}$$

qui se résolvent en

$$\alpha = \frac{2}{3},\ \beta = \frac{1}{2} \text{ et } \gamma = \frac{1}{3}.$$

Enfin, la relation $f(x) = \frac{1}{2}(f(b) + f(d)) = \gamma$ nous donne la probabilité cherchée : $\frac{1}{3}$.

—— Fin du sujet ——