Université Pierre et Marie Curie — 2016 – 2017

Probabilités approfondies – 4M011 — 17 mai 2017

Exercice Correction de l'exercice

Examen - Deuxième session

L'épreuve dure trois heures.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Les quatre exercices sont indépendants.

1. Soit $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathbb{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires positives qui est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathbb{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout $n \geqslant 0$, on note

$$M_n = \max(X_0, \ldots, X_n).$$

1. Soient $n \geqslant 0$ un entier et $a \geqslant 0$ un réel. Vérifier l'égalité

$$\{M_n \geqslant a\} = \{X_0 \geqslant a\} \sqcup \bigsqcup_{k=0}^{n-1} (\{M_k < a\} \cap \{X_{k+1} \geqslant a\}),$$

où les unions sont disjointes, et donner une démonstration de l'inégalité

$$a\mathbb{P}(M_n \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{M_n \geqslant a\}}].$$

2. Pour tout réel $y > 0$, on note $(\log y)^+$ la partie positive du logarithme népérien de y, c'est-à-dire

$$(\log y)^+ = \max(\log y, 0) = \log(\max(y, 1)).$$

On étend cette définition en posant $(\log 0)^+ = 0$.

Montrer que pour tous réels $x, y \geqslant 0$, on a l'inégalité

$$x(\log y)^+ \leqslant x(\log x)^+ + \frac{y}{e}.$$

3. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z on a

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant a)\, da.$$

En déduire que $\mathbb{E}[M_n] \leqslant 1 + \mathbb{E}[X_n(\log M_n)^+]$ puis que

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant \frac{e}{e-1}\left(1 + \mathbb{E}[X_n(\log X_n)^+]\right).$$

4. On fait l'hypothèse que $\sup\{\mathbb{E}[X_n(\log X_n)^+] : n \geqslant 0\} < +\infty$. Que peut-on dire de la convergence de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$?

Solution de l'exercice 1.

1. On obtient l'égalité ensembliste annoncée en décomposant l'événement où $\max(X_0, \ldots, X_n)$ dépasse a suivant la valeur du plus petit entier $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que X_k dépasse a.

L'inégalité qui suit est une inégalité de Doob démontrée dans le cours.

2. Pour $y \in [0, 1]$, l'inégalité est vraie par KO puisqu'alors elle se réduit à $0 \leqslant x(\log x)^+ + \frac{y}{e}$, qui est vraie. Supposons désormais $y > 1$.

Pour $x \in [0, 1]$, l'inégalité s'écrit $x \log y \leqslant \frac{y}{e}$. Or le minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $y \mapsto \frac{y}{e} - \log y$ est atteint en e et vaut 0, si bien que $\frac{y}{e} \geqslant \log y \geqslant x \log y$. Supposons désormais $x > 1$.

Le minimum de la fonction $y \mapsto \frac{y}{e} - x \log y$ est atteint en ex et vaut $-x \log x$, c'est-à-dire que $\frac{y}{e} - x \log y + x \log x \geqslant 0$, ce qu'on voulait démontrer.

3. C'est une application du théorème de Fubini :

$$\int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant a)\, da = \int_0^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z \geqslant a\}}]\, da = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{a \leqslant Z\}}\, da\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{Z} da\right] = \mathbb{E}[Z].$$

En utilisant l'inégalité démontrée à la question précédente, on trouve

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant 1 + \mathbb{E}[X_n(\log X_n)^+] + \frac{1}{e}\mathbb{E}[M_n],$$

d'où on tire l'inégalité souhaitée.

4. Supposons $\sup\{\mathbb{E}[X_n(\log X_n)^+] : n \geqslant 0\} < +\infty$. Puisque pour tout $x \geqslant 0$ on a par exemple $x \leqslant e + x(\log x)^+$ (comme on le vérifie en distinguant les cas $x \leqslant e$ et $x \geqslant e$)

2. Dans un pays imaginaire, la désignation du gouvernement fonctionne de la manière suivante. L'ensemble des personnes susceptibles d'être ministres est un sous-ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ de la population du pays, donné une fois pour toutes. Sur l'ensemble X muni de la tribu de toutes ses parties est donnée une mesure de probabilité α et on note, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\alpha_i = \alpha(\{x_i\}).$$

Au début de chaque mois, on tire un individu dans l'ensemble X sous la loi α. S'il n'a pas été ministre pendant le mois précédent, on ajoute cet individu à l'ensemble des ministres. Si au contraire il était déjà ministre pendant le mois précédent, cet individu sort de l'ensemble des ministres.

Autrement dit, l'ensemble des ministres est une chaîne de Markov dont l'espace d'états est l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ de toutes les parties de X et dont la matrice de transition Q est la suivante : pour toutes parties A et B de X, on a

$$Q_{A,B} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x_i\}, \\ 0 & \text{si } (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ n'est pas un singleton.} \end{cases}$$

On considère $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathbb{F}_n)_{n \geqslant 0}, (\mathbb{P}_A)_{A \in \mathscr{P}(X)}, (M_n)_{n \geqslant 0})$ une chaîne de Markov sur $\mathscr{P}(X)$ de matrice de transition Q.

1. a. Montrer que sous la condition

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\},\ \alpha_i > 0, \tag{1}$$

la chaîne de Markov est irréductible et récurrente.

b. Déterminer, lorsque la condition (1) n'est pas satisfaite, le nombre de classes de récurrence de la chaîne.

On suppose désormais la condition (1) satisfaite.

2. Déterminer toutes les mesures de probabilités invariantes de la chaîne.

3. On pose $T = \inf\{n \geqslant 0 : x_1 \in M_n\}$.

a. Montrer que T est un temps d'arrêt.

b. Calculer, pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, la loi de T sous $\mathbb{P}_A$. On pourra distinguer le cas où $x_1 \in A$ du cas où $x_1 \notin A$. Que vaut $\mathbb{E}_A[T]$?

4. On pose $S = \inf\{n \geqslant T : x_1 \notin M_n\}$.

Montrer que les variables aléatoires $S - T$ et T sont indépendantes et de même loi.

5. Déterminer la proportion asymptotique du temps pendant laquelle l'individu x_1 est ministre, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{x_1 \in M_k\}}.$$

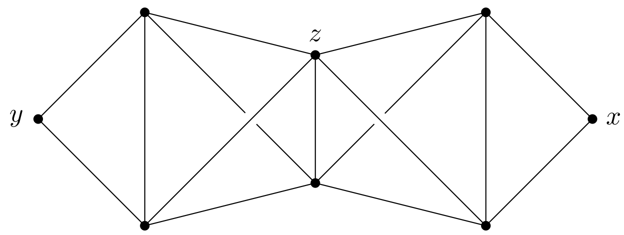
On commencera par dire pourquoi cette limite existe et en quel sens.

6. Au vu des résultats des deux questions précédentes, quelle est l'influence de la valeur de α_1 sur les périodes pendant lesquelles l'individu x_1 est ministre ?

3. Soit $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On suppose qu'il existe un réel $t > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{t\xi_1}] = 1$. Soit $x \geqslant 0$ un réel. Montrer que

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 \text{ tel que } \xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x) \leqslant e^{-tx}.$$

4. On considère, sur le graphe représenté ci-dessous, une marche au hasard qui, à chaque pas, va vers un sommet choisi uniformément parmi tous les voisins du sommet où elle se trouve.



1. Déterminer toutes les mesures de probabilité invariantes pour la marche au hasard.

2. Partant du sommet x, quel est le temps moyen que met la marche au hasard pour revenir au sommet x ?

3. Entre deux visites au sommet x, combien de fois la marche visite-t-elle, en moyenne, le sommet z ?

4. Entre deux visites successives en x, quelle est la probabilité que la marche visite y ?

—— Fin du sujet ——