Université Pierre et Marie Curie — 2016 – 2017
Probabilités approfondies – 4M011 — 14 décembre 2016

Examen

L'épreuve dure trois heures.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale. On fait l'hypothèse qu'il existe une suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs telle que pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$\mathbb{P}(|X_n - X_{n-1}| \leqslant r_n) = 1.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Q_n = r_1^2 + \ldots + r_n^2$. On se propose de démontrer que

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \geqslant 0,\ \mathbb{P}(|X_n - X_0| \geqslant x) \leqslant e^{-\frac{x^2}{2Q_n}}. \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout nombre réel $y \in [-1, 1]$ et tout réel $a \geqslant 0$, on a

$$e^{ay} \leqslant \frac{1-y}{2} e^{-a} + \frac{1+y}{2} e^{a}.$$

En déduire que pour toute sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ et toute variable aléatoire Y telle que $\mathbb{P}(-1 \leqslant Y \leqslant 1) = 1$ et $\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] = 0$, on a les inégalités

$$\mathbb{E}[e^{aY}|\mathscr{G}] \leqslant \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) \leqslant e^{\frac{1}{2}a^2}.$$

2. Montrer que pour toute variable aléatoire Y, tous réels $a \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}(Y \geqslant x) \leqslant e^{-ax}\mathbb{E}[e^{aY}].$$

3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que pour tout réel $a \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{E}[e^{a(X_n - X_0)}] \leqslant e^{\frac{1}{2}a^2 r_n^2}\mathbb{E}[e^{a(X_{n-1}-X_0)}].$$

En déduire que pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $a \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X_0| \geqslant x) \leqslant e^{-ax + a^2\frac{Q_n}{2}}.$$

4. Démontrer l'assertion (1).

5. En utilisant l'assertion (1), donner une démonstration de la loi forte des grands nombres pour une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes, identiquement distribuées, d'espérance nulle et telles qu'il existe un réel $r \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}(|\xi_1| \leqslant r) = 1$.

Correction de l'exercice 1. 1. La fonction $y \mapsto e^{ay}$ est convexe et on a

$$y = \frac{1-y}{2} \times (-1) + \frac{1+y}{2} \times 1,$$

avec $\frac{1-y}{2}$ et $\frac{1+y}{2}$ compris entre 0 et 1 et de somme égale à 1. On en déduit la première inégalité demandée.

On écrit ensuite, en utilisant la positivité puis la linéarité de l'espérance conditionnelle, et enfin l'hypothèse $\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] = 0$,

$$\mathbb{E}[e^{aY}|\mathscr{G}] \leqslant \mathbb{E}\left[\frac{1-Y}{2}e^{-a} + \frac{1+Y}{2}e^{a}\middle|\mathscr{G}\right] = \frac{1}{2}(e^{-a} + e^{a}).$$

Pour établir la dernière inégalité, on écrit

$$\frac{1}{2}(e^{a} + e^{-a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!}$$

puis on observe que pour tout $n \geqslant 1$,

$$(2n)! = n!\underbrace{(n+1)\dots(2n)}_{n \text{ facteurs}} \geqslant n! \underbrace{2\dots2}_{n \text{ facteurs}} = 2^n n!.$$

Pour $n = 0$, on vérifie directement que $(2n)! = 1 = 2^n n!$. Finalement,

$$\frac{1}{2}(e^{a} + e^{-a}) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2^n n!} = e^{\frac{1}{2}a^2}.$$

2. On utilise le fait que, puisque a est positif, la fonction $y \mapsto e^{ay}$ est croissante, et on applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive e^{aY} :

$$\mathbb{P}(Y \geqslant x) = \mathbb{P}(e^{aY} \geqslant e^{ax}) \leqslant e^{-ax}\mathbb{E}[e^{aY}].$$

3. Écrivons $X_n - X_0 = (X_n - X_{n-1}) + (X_{n-1} - X_0)$ et calculons l'espérance en conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_{n-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{a(X_n - X_0)}] &= \mathbb{E}[e^{a(X_n - X_{n-1})}e^{a(X_{n-1} - X_0)}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{a(X_n - X_{n-1})}e^{a(X_{n-1} - X_0)}|\mathscr{F}_{n-1}]] \\
&= \mathbb{E}[e^{a(X_{n-1} - X_0)}\mathbb{E}[e^{a(X_n - X_{n-1})}|\mathscr{F}_{n-1}]].
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant appliquer les résultats que nous venons d'établir à la variable $Y = X_n - X_{n-1}$ dont l'espérance conditionnelle sachant $\mathscr{F}_{n-1}$ est nulle. Cette variable n'est pas bornée par 1 mais par r_n, c'est-à-dire que $\frac{1}{r_n}Y$ est bornée par 1, si bien que

$$\mathbb{E}[e^{a(X_n - X_{n-1})}|\mathscr{F}_{n-1}] \leqslant e^{\frac{1}{2}a^2 r_n^2},$$

ce qui entraîne l'inégalité demandée.

Par récurrence sur n, on vérifie maintenant que

$$\mathbb{E}[e^{a(X_n-X_0)}] \leqslant e^{\frac{1}{2}a^2(r_1^2+\ldots+r_n^2)} = e^{a^2\frac{Q_n}{2}},$$

ce qui, combiné au résultat de la question 2, fournit l'inégalité souhaitée.

4. Nous pouvons choisir a de manière à rendre le membre de droite de l'inégalité que nous venons de démontrer aussi petit que possible. Ceci a lieu lorsque $a = \frac{x}{Q_n}$ et dans ce cas, l'inégalité est exactement l'inégalité (1).

5. Considérons la martingale $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Nous venons de démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, nous avons l'inégalité

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant x) \leqslant e^{-\frac{x^2}{2nr^2}}.$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon^2}{2r^2}n},$$

si bien que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| > \varepsilon\right) < \infty.$$

En appliquant le critère parfois dit de convergence en probabilité rapide, ou en appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 2. Soit $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On suppose qu'il existe un réel $t > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{t\xi_1}] = 1$. Soit $x \geqslant 0$ un réel. Montrer que

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 \text{ tel que } \xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x) \leqslant e^{-tx}.$$

Correction de l'exercice 2. Posons $M_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $M_n = e^{t\xi_1} \ldots e^{t\xi_n}$. La suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale (positive) à laquelle nous pouvons appliquer l'inégalité maximale : pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(\max(M_0, \ldots, M_n) \geqslant e^{tx}) \leqslant e^{-tx}\mathbb{E}[M_n] = e^{-tx}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 \text{ tel que } \xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x) &= 1 - \mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 \text{ tel que } e^{t(\xi_1+\ldots+\xi_n)} \geqslant e^{tx}) \\
&= \mathbb{P}(\forall n \geqslant 0, M_n \leqslant e^{tx}) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \max(M_0, \ldots, M_n) \leqslant e^{tx}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\downarrow \mathbb{P}(\max(M_0, \ldots, M_n) \leqslant e^{tx}) \\
&\leqslant e^{-tx}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. On considère sur un ensemble dénombrable E une matrice de transition $Q = (p(x,y) : x, y \in E)$. On note G la fonction de Green de la chaîne de Markov de matrice de transition Q.

1. On fixe un point $y \in E$. Montrer qu'on a, pour tout $x \in E$,

$$G(x,y) = \mathbf{1}_{\{y\}}(x) + \sum_{z \in E} p(x,z) G(z,y). \tag{2}$$

On fixe désormais deux entiers a et b tels que $b \geqslant a+2$ et on considère l'ensemble $E = \{a, a+1, \ldots, b\}$ des entiers compris entre a et b. On considère sur E la matrice de transition Q définie comme suit : pour tout $i \in E \setminus \{a,b\}$, on a

$$p(i, i+1) = p(i, i-1) = \frac{1}{2}$$

et $p(a,a) = p(b,b) = 1$.

2. Déterminer parmi les éléments de E quels sont les états récurrents et les états transients.

Soit y fixé dans $E \setminus \{a,b\}$. On souhaite calculer $G(x,y)$ pour tout $x \in E$.

3. Calculer $G(a,y)$ et $G(b,y)$.

4. Montrer que si c et d sont des entiers tels que $c < d$ et si $f : \{c, \ldots, d\} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que pour tout $x \in \{c+1, \ldots, d-1\}$ on ait $f(x) = \frac{1}{2}(f(x-1) + f(x+1))$, alors il existe des réels α et β tels que pour tout $x \in \{c, \ldots, d\}$, on ait $f(x) = \alpha x + \beta$.

5. En utilisant (2), et en distinguant les cas $x \leqslant y$ et $x \geqslant y$, donner une expression de $G(x,y)$ en fonction de $G(y,y)$.

6. En utilisant une fois encore (2), calculer $G(y,y)$.

7. Déterminer la valeur de $G(x,y)$ pour tous $x, y \in E$.

8. Rappeler la démonstration du fait que pour tous états $x, y \in E$ distincts et tels que $G(x,y) < \infty$, le quotient $\frac{G(x,y)}{G(y,y)}$ est la probabilité partant de x de passer au moins une fois en y.

9. Soit $(W_n)_{n \geqslant 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 1. Posons $T = \inf\{n \geqslant 0 : W_n = 0\}$ et $H = \max\{W_n : n \leqslant T\}$. Déterminer la loi de H.

Correction de l'exercice 3. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E}, (X_n)_{n \geqslant 0})$ une chaîne de Markov sur E de matrice de transition Q.

1. On calcule $G(x,y)$ en appliquant la propriété de Markov faible au temps 1 :

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= \mathbb{E}_x[N_y] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{y\}}(x) + \widehat{N_y}(\theta_1(X))] \\
&= \mathbf{1}_{\{y\}}(x) + \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\widehat{N_y}(\theta_1(X))|\mathscr{F}_1]] \\
&= \mathbf{1}_{\{y\}}(x) + \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_1}[N_y]] \\
&= \mathbf{1}_{\{y\}}(x) + \sum_{z\in E} p(x,z)\mathbb{E}_z[N_y] \\
&= \mathbf{1}_{\{y\}}(x) + \sum_{z\in E} p(x,z)G(z,y).
\end{aligned}$$

2. Les états a et b sont absorbants : partant de a ou de b, on reste éternellement sur place. Ces états sont donc en particulier récurrents. Partant de tout autre état, il existe une probabilité strictement positive d'aller toujours vers les entiers croissants, et d'atteindre b avant d'être revenu à son point de départ : en symboles, pour tout y strictement compris entre a et b,

$$\mathbb{P}_y(T_y = \infty) \geqslant \mathbb{P}_y(X_0 = y, X_1 = y+1, \ldots, X_{b-y} = b) = \frac{1}{2^{b-y}} > 0.$$

Ainsi, tous les états de $E \setminus \{a,b\}$ sont transients.

3. Partant de a ou de b, on ne visite aucun autre état que son état de départ. On a donc $G(a,y) = \mathbb{E}_a[N_y] = 0$ et $G(b,y) = \mathbb{E}_b[N_y] = 0$.

4. Posons $\alpha = f(c+1) - f(c)$ et $\beta = f(c) - (f(c+1) - f(c))c$. Par construction, $f(c) = \alpha c + \beta$ et $f(c+1) = \alpha(c+1) + \beta$. Supposons établi pour un certain $k \in \{c+1, \ldots, d-1\}$ que $f(k-1) = \alpha(k-1) + \beta$ et $f(k) = \alpha k + \beta$. Alors, par hypothèse, $f(k+1) = 2f(k) - f(k-1) = \alpha(k+1) + \beta$.

5. Sur l'ensemble $\{a, \ldots, y\}$, la fonction $x \mapsto G(x,y)$ est, d'après la question précédente, la restriction d'une fonction affine. On a donc, puisque $G(a,y) = 0$,

$$\forall x \leqslant y,\ G(x,y) = \frac{x-a}{y-a} G(y,y).$$

De même,

$$\forall x \geqslant y,\ G(x,y) = \frac{b-x}{b-y} G(y,y).$$

6. Puisque y est transient, on a $G(y,y) < \infty$. En écrivant la relation (2) en $x = y$, on trouve

$$G(y,y) = 1 + \frac{1}{2}\frac{y-a-1}{y-a} G(y,y) + \frac{1}{2}\frac{b-y-1}{b-y} G(y,y),$$

d'où on tire

$$G(y,y) = 2\frac{(b-y)(y-a)}{b-a}.$$

7. On a $G(a,a) = G(b,b) = \infty$ et dans tous les autres cas,

$$G(x,y) = 2\frac{(b - \max(x,y))(\min(x,y) - a)}{b - a}.$$

8. Voir le cours pour la démonstration du fait que

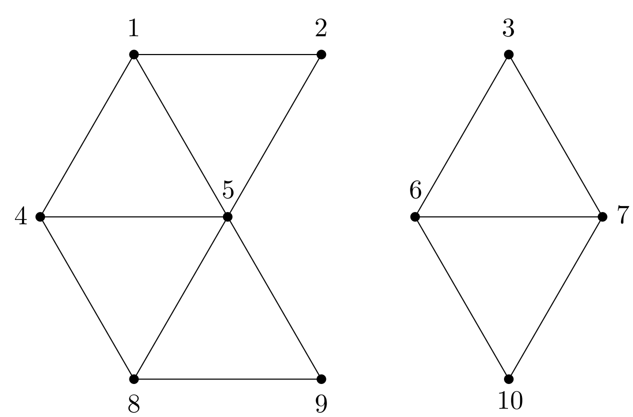
$$G(x,y) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)G(y,y)$$

en appliquant la propriété de Markov forte au temps T_x.

9. La probabilité que H soit supérieur ou égal à n est la probabilité que la marche aléatoire simple issue de 1 passe en n avant d'atteindre 0. En appliquant le calcul que nous venons de faire avec $a = 0$ et $b = n + 1$, nous voyons que cette probabilité est $\frac{1}{n}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(H = n) = \mathbb{P}(H \geqslant n) - \mathbb{P}(H \geqslant n + 1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Exercice 4. On considère, sur le graphe représenté ci-dessous, une marcheuse au hasard qui, à chaque pas, va vers un sommet choisi uniformément parmi tous les voisins du sommet où elle se trouve.



1. Déterminer les états transients, les états récurrents et les classes d'irréductibilité de la chaîne de Markov que notre marcheuse incarne.

2. Déterminer, avec aussi peu de calculs que possible, et si possible sans aucun calcul, toutes les mesures de probabilité invariantes de cette chaîne de Markov.

3. Partant du sommet 5, quel est le temps moyen que met la marcheuse pour revenir au sommet 5 ?

4. Entre deux visites au sommet 2, combien de fois la marcheuse visite-t-elle, en moyenne, le sommet 9 ?

5. Partant du sommet 3, combien de temps met en moyenne la marcheuse pour atteindre le sommet 10 ?

Correction de l'exercice 4. 1. Notons $(Q_{i,j})_{i,j=1\dots10}$ la matrice de transition de la chaîne de Markov incarnée par la marcheuse. Notons que la matrice Q est symétrique.

Posons $A = \{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ et $B = \{3, 6, 7, 10\}$. Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $Q_{a,b} = Q_{b,a} = 0$. La matrice Q a donc la structure diagonale par blocs suivante :

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_B \end{pmatrix} \end{array}$$

et il en est de même de toutes ses puissances. Ainsi, pour tous $a \in A$ et $b \in B$, on a $G(a, b) = G(b, a) = 0$. Autrement dit, partant de n'importe quel état de A, la chaîne reste avec probabilité 1 dans A, et partant de n'importe quel état de B, elle reste avec probabilité 1 dans B.

Puisque A et B sont finis, ils contiennent chacun au moins un état récurrent. En effet, pour B par exemple, nous pouvons écrire que

$$\infty = \mathbb{E}_3[\infty] = \mathbb{E}_3[N_3 + N_6 + N_7 + N_{10}] = G(3, 3) + G(3, 6) + G(3, 7) + G(3, 10),$$

si bien que l'un au moins de ces quatre nombres est donc infini, et l'inégalité $G(3, y) \leqslant G(y, y)$ montre que tout état y tel que $G(3, y) = \infty$ est récurrent.

En examinant le graphe sur lequel la marcheuse se déplace, on observe que tout état de A est accessible depuis tout autre état de A en deux pas exactement, et de même pour B. Autrement dit, les matrices Q_A^2 et Q_B^2 ont tous leurs coefficients strictement positifs. En particulier, tout état de A mène à tout autre état de A, et puisque A contient un état récurrent, tous les états de A sont récurrents et appartiennent à la même classe de récurrence. De même, tous les états de B sont récurrents et appartiennent à la même classe de récurrence.

Finalement, A et B sont les deux classes de récurrence de notre chaîne de Markov.

2. En décomposant une mesure de probabilités π selon la partition en A et B l'espace d'états, c'est-à-dire en écrivant $\pi = (\mu_A \ \mu_B)$ où $\mu_A = (\pi(1)\pi(2)\pi(4)\pi(5)\pi(8)\pi(9))$ et $\mu_B = (\pi(3)\pi(6)\pi(7)\pi(10))$, on constate que le système

$$\begin{cases} \pi Q = \pi \\ \pi(A \cup B) = 1 \end{cases}$$

équivaut au système

$$\begin{cases} \mu_A Q_A = \mu_A \\ \mu_B Q_B = \mu_B \\ \mu_A(A) + \mu_B(B) = 1. \end{cases}$$

La matrice Q_A est la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible et récurrente sur A. Elle admet donc une mesure invariante unique à une constante multiplicative près. Pour trouver cette mesure, on peut chercher une mesure réversible pour Q_A, et éventuellement se souvenir que pour la marche au hasard sur un graphe, la mesure qui à chaque sommet attribue la masse égale à son degré (le nombre de ses voisins) est réversible. Ainsi, la mesure

$$(3\ 2\ 3\ 5\ 3\ 2)$$

est-elle réversible, donc invariante pour Q_A. De même, la mesure

$$(2\ 3\ 3\ 2)$$

est invariante pour Q_B.

Toute mesure de probabilité invariante pour notre chaîne est une combinaison linéaire de ces deux mesures.

Les mesures de probabilité invariantes pour notre chaîne sont donc les mesures

$$\pi = \begin{array}{c} \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccccccccc} \pi(1) & \pi(2) & \pi(4) & \pi(5) & \pi(8) & \pi(9) & \pi(3) & \pi(6) & \pi(7) & \pi(10) \\ \frac{p}{6} & \frac{p}{9} & \frac{p}{6} & \frac{5p}{18} & \frac{p}{6} & \frac{p}{9} & \frac{1-p}{5} & \frac{3(1-p)}{10} & \frac{1-p}{5} & \frac{3(1-p)}{10} \end{array} \right)$$

où p est un élément de l'intervalle $[0,1]$.

3. Le temps moyen de retour en 5 partant de 5 vaut l'inverse de la masse de l'état 5 pour l'unique mesure de probabilité invariante de la chaîne irréductible et récurrente de matrice de transition Q_A. On obtient cette mesure en prenant $p = 1$ dans l'expression ci-dessus de π. On en déduit que

$$\mathbb{E}_5[T_5] = \frac{18}{5} = 3,6.$$

4. Le nombre moyen de visites au sommet 9 entre deux visites au sommet 2 peut s'écrire

$$\mathbb{E}_2\left[\sum_{k=0}^{T_2-1} \mathbf{1}_{\{X_k=9\}}\right].$$

Nous reconnaissons dans cette expression la masse attribuée au sommet 9 par l'unique mesure invariante pour Q_A qui donne la masse 1 au sommet 2. Cette mesure s'obtient en divisant par 2 la mesure (3 2 3 5 3 2) et elle attribue au sommet 9 la masse 1.

Ainsi, entre deux visites au sommet 2, la chaîne passe, en moyenne, une fois par le sommet 9.

5. Notons $\tau_{10} = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 10\}$ le temps d'atteinte de 10. Le problème est de calculer $\mathbb{E}_3[\tau_{10}]$.

En appliquant la propriété de Markov faible au temps 1, on trouve que

$$\mathbb{E}_3[\tau_{10}] = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}_6[\tau_{10}] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_7[\tau_{10}].$$

Le graphe étant symétrique par rapport à l'axe vertical, les sommets 6 et 7 y jouent le même rôle et on a

$$\mathbb{E}_6[\tau_{10}] = \mathbb{E}_7[\tau_{10}].$$

Notons $t = \mathbb{E}_3[\tau_{10}]$ et $s = \mathbb{E}_6[\tau_{10}] = \mathbb{E}_7[\tau_{10}]$. Remarquons que $\mathbb{E}_{10}[\tau_{10}] = 0$. Nous venons d'établir que

$$t - s = 1.$$

En appliquant la propriété de Markov faible au temps 1 à la chaîne issue de 6 (ou de 7), nous obtenons la relation supplémentaire

$$s = 1 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}0,$$

c'est-à-dire

$$t - 2s = -3.$$

On en déduit que $s = 4$ et $t = 5$:

$$\mathbb{E}_3[\tau_{10}] = 5.$$

— Fin du sujet —