Université Pierre et Marie Curie — 2016 – 2017

Probabilités approfondies – 4M011 — 14 décembre 2016

Examen

L'épreuve dure trois heures.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones.
Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale. On fait l'hypothèse qu'il existe une suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs telle que pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$\mathbb{P}(|X_n - X_{n-1}| \leqslant r_n) = 1.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Q_n = r_1^2 + \ldots + r_n^2$. On se propose de démontrer que

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \geqslant 0,\ \mathbb{P}(|X_n - X_0| \geqslant x) \leqslant e^{-\frac{x^2}{2Q_n}}. \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout nombre réel $y \in [-1, 1]$ et tout réel $a \geqslant 0$, on a

$$e^{ay} \leqslant \frac{1-y}{2}e^{-a} + \frac{1+y}{2}e^{a}.$$

En déduire que pour toute sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ et toute variable aléatoire Y telle que $\mathbb{P}(-1 \leqslant Y \leqslant 1) = 1$ et $\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] = 0$, on a les inégalités

$$\mathbb{E}[e^{aY}|\mathscr{G}] \leqslant \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) \leqslant e^{\frac{1}{2}a^2}.$$

2. Montrer que pour toute variable aléatoire Y, tous réels $a \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}(Y \geqslant x) \leqslant e^{-ax}\mathbb{E}[e^{aY}].$$

3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que pour tout réel $a \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{E}[e^{a(X_n - X_0)}] \leqslant e^{\frac{1}{2}a^2 r_n^2}\mathbb{E}[e^{a(X_{n-1}-X_0)}].$$

En déduire que pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $a \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X_0| \geqslant x) \leqslant e^{-ax + a^2\frac{Q_n}{2}}.$$

4. Démontrer l'assertion (1).

5. En utilisant l'assertion (1), donner une démonstration de la loi forte des grands nombres pour une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes, identiquement distribuées, d'espérance nulle et telles qu'il existe un réel $r \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}(|\xi_1| \leqslant r) = 1$.

Exercice 2. Soit $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On suppose qu'il existe un réel $t>0$ tel que $\mathbb{E}[e^{t\xi_1}]=1$. Soit $x\geqslant 0$ un réel. Montrer que

$$\mathbb{P}(\exists n \geqslant 0 \text{ tel que } \xi_1+\ldots+\xi_n \geqslant x) \leqslant e^{-tx}.$$

Exercice 3. On considère sur un ensemble dénombrable E une matrice de transition $Q=(p(x,y) : x,y\in E)$. On note G la fonction de Green de la chaîne de Markov de matrice de transition Q.

1. On fixe un point $y\in E$. Montrer qu'on a, pour tout $x\in E$,

$$G(x,y)=\mathbf{1}_{\{y\}}(x)+\sum_{z\in E} p(x,z)G(z,y). \tag{2}$$

On fixe désormais deux entiers a et b tels que $b\geqslant a+2$ et on considère l'ensemble $E=\{a,a+1,\ldots,b\}$ des entiers compris entre a et b. On considère sur E la matrice de transition Q définie comme suit : pour tout $i\in E\setminus\{a,b\}$, on a

$$p(i,i+1)=p(i,i-1)=\frac{1}{2}$$

et $p(a,a)=p(b,b)=1$.

2. Déterminer parmi les éléments de E quels sont les états récurrents et les états transients.

Soit y fixé dans $E\setminus\{a,b\}$. On souhaite calculer $G(x,y)$ pour tout $x\in E$.

3. Calculer $G(a,y)$ et $G(b,y)$.

4. Montrer que si c et d sont des entiers tels que $c<d$ et si $f:\{c,\ldots,d\}\to\mathbb{R}$ est une fonction telle que pour tout $x\in\{c+1,\ldots,d-1\}$ on ait $f(x)=\frac{1}{2}(f(x-1)+f(x+1))$, alors il existe des réels α et β tels que pour tout $x\in\{c,\ldots,d\}$, on ait $f(x)=\alpha x+\beta$.

5. En utilisant (2), et en distinguant les cas $x\leqslant y$ et $x\geqslant y$, donner une expression de $G(x,y)$ en fonction de $G(y,y)$.

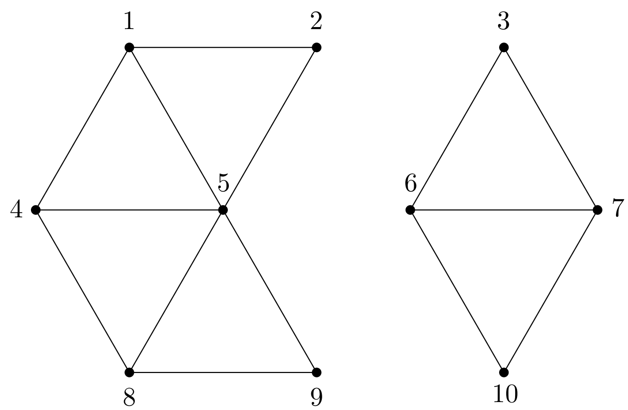
6. En utilisant une fois encore (2), calculer $G(y,y)$.

7. Déterminer la valeur de $G(x,y)$ pour tous $x,y\in E$.

8. Rappeler la démonstration du fait que pour tous états $x,y\in E$ distincts et tels que $G(x,y)<\infty$, le quotient $\frac{G(x,y)}{G(y,y)}$ est la probabilité partant de x de passer au moins une fois en y.

9. Soit $(W_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 1. Posons $T=\inf\{n\geqslant 0 : W_n=0\}$ et $H=\max\{W_n : n\leqslant T\}$. Déterminer la loi de H.

Exercice 4. On considère, sur le graphe représenté ci-dessous, une marcheuse au hasard qui, à chaque pas, va vers un sommet choisi uniformément parmi tous les voisins du sommet où elle se trouve.



1. Déterminer les états transients, les états récurrents et les classes d'irréductibilité de la chaîne de Markov que notre marcheuse incarne.

2. Déterminer, avec aussi peu de calculs que possible, et si possible sans aucun calcul, toutes les mesures de probabilité invariantes de cette chaîne de Markov.

3. Partant du sommet 5, quel est le temps moyen que met la marcheuse pour revenir au sommet 5 ?

4. Entre deux visites au sommet 2, combien de fois la marcheuse visite-t-elle, en moyenne, le sommet 9 ?

5. Partant du sommet 3, combien de temps met en moyenne la marcheuse pour atteindre le sommet 10 ?

—— Fin du sujet ——