



Master de mathématiques  
MU4MA011

# PROBABILITÉS APPROFONDIES

Fascicule d'exercices

Année 2022–2023

Cours : Thierry LÉVY  
Travaux dirigés : David GARCÍA-ZELADA, Sébastien MARTINEAU, Raphaël ROUX



# Chapitre 0

## Rappels de probabilités

### Espaces de probabilité et variables aléatoires

**Exercice 0.1.** Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est  $p$ , avec  $0 < p < 1$ . Ce meuble comporte sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

**Exercice 0.2.** Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  des événements d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

1. Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{1}_{\cap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$ .
2. Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k})$ .
3. On pose  $p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$ . Montrer que

$$\mathbf{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k.$$

4.  $n$  personnes participent à un *père Noël secret* : les  $n$  noms (que l'on suppose tous différents) sont écrits sur des étiquettes, et chaque personne tire au hasard une étiquette (et la garde) – le nom écrit sur cette étiquette est celui de la personne à qui elle doit faire un cadeau. On note  $p(n)$  la probabilité qu'au moins une personne tire une étiquette avec son propre nom. Expliciter  $p(n)$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$ .

**Exercice 0.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes les valeurs entières entre 1 et  $n$  suivant les probabilités :

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = 1/n, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Calculer  $\mathbf{P}(X = Y)$  et  $\mathbf{P}(X \geq Y)$ . Déterminer la loi de  $X - Y$ .

**Exercice 0.4.** Soit  $T$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$  définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . On suppose que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{P}(T \geq n) > 0$  et, pour tous  $n, p \geq 1$ ,  $\mathbf{P}(T \geq n + p | T \geq n) = \mathbf{P}(T \geq p)$ . Montrer que  $T$  suit une loi géométrique.

**Exercice 0.5.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité. On considère  $\varepsilon$  et  $X$  des variables aléatoires réelles indépendantes définies sur cet espace. On suppose que  $\varepsilon$  a pour loi :  $\mathbf{P}(\varepsilon = -1) = \mathbf{P}(\varepsilon = 1) = 1/2$ .

1. Montrer que  $\varepsilon X$  et  $\varepsilon$  sont indépendantes si et seulement si la loi de  $X$  est symétrique (c'est-à-dire,  $X$  a la même loi que  $-X$ ).
2. Construire un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  pour lequel il existe deux sous-tribus  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  indépendantes et une variable aléatoire  $Y$  telle que :
  - (a)  $Y$  est  $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ -mesurable,
  - (b)  $Y$  est indépendante de  $\mathcal{B}$ ,
  - (c)  $Y$  n'est pas  $\mathcal{A}$ -mesurable.
3. Construire un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  pour lequel il existe deux sous-tribus  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  indépendantes et une variable aléatoire  $Z$  telle que :
  - (a)  $Z$  est  $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ -mesurable,
  - (b)  $Z$  est indépendante de  $\mathcal{B}$ ,
  - (c)  $Z$  est indépendante de  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 0.6.** On considère  $n$  variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, r\}$  et de même loi donnée par  $\mathbf{P}(X_1 = i) = p_i, 1 \leq i \leq r$ . On définit  $Z_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j=i\}}$ .

1. Déterminer la loi de  $Z_1$ . À quelle condition les variables aléatoires  $Z_i$  et  $Z_j$  ont-elles même loi ?
2. Calculer la covariance de  $Z_1$  et  $Z_2$ . Les variables aléatoires  $Z_1$  et  $Z_2$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 0.7.** On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit la loi gamma de paramètre  $a > 0$  si  $X$  admet la densité

$$\frac{1}{\Gamma(a)} e^{-x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\{x>0\}}, \quad \text{où } \Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

1. Soit  $U$  une variable aléatoire de loi gamma de paramètre  $a$ . Calculer explicitement les moments  $\mathbf{E}(U^n), n \in \mathbf{N}$ .
2. Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes de loi gamma de paramètres respectifs  $a$  et  $b$ . Montrer que les variables aléatoires  $U/(U+V)$  et  $U+V$  sont indépendantes et expliciter les lois de  $U/(U+V)$  et  $U+V$ .

**Exercice 0.8.** Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . On pose  $S_0 = 0$  et, pour  $1 \leq k \leq n, S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ .

1. Déterminer la loi du vecteur aléatoire  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ .
2. Montrer que la variable aléatoire  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  admet pour densité

$$f_{S_n}(s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} \frac{s_n^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{\{s_n>0\}}.$$

3. Déterminer la fonction caractéristique de  $S_n$ .
4. Calculer  $\mathbf{E}(S_n)$  et  $\text{Var}(S_n)$ .

## Convergences de suites de variables aléatoires

**Exercice 0.9.** Dans les cas suivants, quels sont les différents modes de convergence que la suite de variables aléatoires réelles  $(X_n, n \geq 1)$  est susceptible de réaliser ?

1.  $\mathbf{P}(X_n = 1 - \frac{1}{n}) = \mathbf{P}(X_n = 1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$  ;
2.  $\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{2^n}$ ,  $\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2^n}$  ;
3.  $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ ,  $\mathbf{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$  ;
4.  $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$  ;
5.  $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-3/2}$ ,  $\mathbf{P}(X_n = n) = n^{-3/2}$  ;
6.  $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$ ,  $\mathbf{P}(X_n = 1) = p_n$ , où les  $X_n$  sont supposées indépendantes ; dans ce cas, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite  $(p_n)$  pour que
  - (a)  $(X_n)$  converge p.s. ;
  - (b)  $(X_n)$  converge dans  $\mathbf{L}^1$  ;
  - (c)  $(X_n)$  converge en loi (i.e.,  $\mathbf{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbf{E}(f(X))$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour toute application continue bornée  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ).

**Exercice 0.10.** Soient  $(X_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et  $X$  une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que, si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ , alors  $X_n \rightarrow X$  p.s. (quand  $n \rightarrow \infty$ ).
2. On suppose que  $X_n \rightarrow X$  p.s. Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ .
3. Conclure.

**Exercice 0.11.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers une variable aléatoire  $X$ . Montrer qu'il existe une sous-suite  $(X_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$  telle que  $\mathbf{P}(|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2}$ . En déduire que  $(X_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$  converge presque sûrement.

**Exercice 0.12.** Soit  $(X_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires telles que  $X_n$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $1/n$ .

1. Montrer que la suite  $(X_n)$  converge en probabilité et trouver sa limite.
2. Montrer que la suite  $(X_{n^2})$  converge presque sûrement.

**Exercice 0.13.** [Pas de convergence en probabilité pour la moyenne de Césaro] Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, la fonction de répartition de  $X_n$  étant donnée par

$$F_n(x) = 0 \text{ si } x < 0 \quad \text{et} \quad F_n(x) = 1 - \frac{1}{x+n} \text{ si } x \geq 0.$$

On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , et  $Y_n = \frac{S_n}{n}$ . Montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers 0, mais pas la suite  $(Y_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice 0.14.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On définit

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}.$$

1. Montrer que, presque sûrement,  $Y_n$  converge, vers une limite que l'on notera  $Y$ .
2. Si  $p = 1/2$ , donner la loi de  $Y$ .

*Indication : utiliser la convergence de la fonction de répartition.*

**Exercice 0.15.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes avec  $\mathbf{E}[X_n] = 0$  pour tout  $n \geq 1$ . On pose  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . On suppose que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Var}(X_n) < +\infty$ .

1. Montrer que  $S_n$  converge dans  $\mathbf{L}^2$  vers une variable aléatoire  $S$ .

*Indication : on pourra utiliser le fait que  $\mathbf{L}^2$  est complet, i.e. que chaque suite de Cauchy a une limite.*

2. En déduire que  $E[S] = 0$  et  $\text{Var}(S - S_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \text{Var}(X_k)$  pour tout  $n$ .
3. Montrer que si on a de plus  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \text{Var}(X_n) < +\infty$ , alors la convergence a lieu presque sûrement.

**Exercice 0.16.** 1. Soit  $U$  une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 1]$  et  $(U_n)_{(n \geq 0)}$  une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que  $U$ . Soit d'autre part  $Y$  une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 (ayant donc comme densité  $\exp(-x)1_{\mathbf{R}_+}(x)$ ). Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $Z_n = n \min\{U_1, \dots, U_n\}$ . Montrer que  $Z_n$  converge en loi vers  $Y$ .

2. Soit maintenant  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, \infty[$  et  $(X_n)_{(n \geq 1)}$  une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que  $X$ . Montrer que

(a) Si  $\mathbf{P}(X > x) = o(1/x)$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  alors

$$Z_n = \frac{1}{n} \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

converge en loi vers 0.

(b) Si  $\mathbf{P}(X > x) \sim \alpha/x^\lambda$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , avec  $\alpha, \lambda > 0$  alors

$$Z_n = \frac{1}{n^{1/\lambda}} \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

converge vers une variable aléatoire  $Y$  de loi de Fréchet, c'est-à-dire dont la fonction de répartition est donnée par  $\mathbf{P}(Y \leq t) = \exp(-\alpha t^{-\lambda})1_{\mathbf{R}_+}(t)$ .

**Exercice 0.17.** [Lemme de Slutsky]

1. En utilisant des fonctions caractéristiques, montrer que si  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ , et si  $(Y_n)$  converge en loi vers une constante  $c$ , alors le couple  $(X_n, Y_n)$  converge en loi vers le couple  $(X, c)$ .
2. Donner un contre exemple où  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ ,  $(Y_n)$  converge en loi vers  $Y$  (une variable aléatoire non constante), mais où le couple  $(X_n, Y_n)$  ne converge pas en loi.

**Exercice 0.18.** Soit  $(X_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires positives intégrables convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire  $X$  intégrable. On suppose de plus que  $\mathbf{E}(X_n) \rightarrow \mathbf{E}(X)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Montrer que la suite  $(X_n)$  converge vers  $X$  dans  $\mathbf{L}^1$ .

**Exercice 0.19.** Soient  $X_1, X_2, \dots$  des variables aléatoire réelles indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. On pose  $Y_n := \prod_{i=1}^n X_i$ .

1. Que vaut  $\mathbf{E}[Y_n]$  ?
2. Montrer que  $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$ . En déduire la valeur de  $\mathbf{E}[\sqrt{Y_n}]$ .
3. Montrer que, pour tout  $t > 0$ ,  $\mathbf{P}(Y_n \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{\pi}/2)^n$ .
4. En déduire que p.s.  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0$ .

**Exercice 0.20.** Soit  $1 \leq p < q < \infty$ . En utilisant la fonction convexe  $x \mapsto x^{q/p}$ , montrer que pour toute variable aléatoire  $X$  réelle  $X$ , on a  $(\mathbf{E}|X|^p)^{1/p} \leq (\mathbf{E}|X|^q)^{1/q}$ .

En déduire l'inclusion  $\mathbf{L}^q \subset \mathbf{L}^p$ . Montrer que si une suite de variable aléatoires converge dans  $\mathbf{L}^q$ , alors elle converge aussi dans  $\mathbf{L}^p$ .

## Autour de la marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$

Dans les exercices qui suivent,  $(X_n, n \geq 1)$  est une famille de variables aléatoires i.i.d. telle que  $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ ,  $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ ,  $0 < p < 1$ . On pose  $S_0 = 0$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  pour  $n \geq 1$ .

- Exercice 0.21.**
1. Pour  $n \geq 1$ , calculer  $\mathbf{P}(S_n = 0)$ .
  2. Étudier  $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(S_n = 0)$ . Que peut-on en conclure ?
  3. Si  $p \neq 1/2$ , retrouver cette conclusion en utilisant la loi des grands nombres.

**Exercice 0.22.** On suppose que  $p = 1/2$ , et on cherche à montrer que presque sûrement, on a  $\limsup S_n = +\infty$  et  $\liminf S_n = -\infty$ .

1. Pour  $K \geq 1$ , on considère les événements

$$A_n = \{X_{nK+1} = \dots = X_{(n+1)K} = +1\} \quad n \geq 1.$$

Montrer que pour tout  $K$ ,  $\mathbf{P}$ -p.s.  $A_n$  est réalisé infiniment souvent.

2. En déduire que pour tout  $K$ ,  $\mathbf{P}(-K/2 < S_n < K/2 \text{ pour tout } n \geq 1) = 0$ , puis que

$$\mathbf{P}(\{\limsup S_n = +\infty\} \cup \{\liminf S_n = -\infty\}) = 1.$$

3. Montrer que l'événement  $\{\limsup S_n = +\infty\}$  appartient à la tribu queue de la suite  $(X_n)$ , définie par  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \sigma(X_{n+k}, k \geq 0)$ , et utiliser la loi du 0-1 de Kolmogorov pour conclure que  $\mathbf{P}(\limsup S_n = +\infty) = 1$ .

**Exercice 0.23.** On suppose de nouveau dans cette question que  $p = 1/2$ , et on pose  $M_n = \max_{0 \leq i \leq n} S_i$ .

1. Soit  $k \in \mathbf{Z}$ , et  $y \geq k$ ,  $y \geq 1$ . Montrer que  $\mathbf{P}(S_n = k, M_n \geq y) = \mathbf{P}(S_n = 2y - k)$ .  
Indication : on pourra introduire le temps  $\tau = \inf\{i; S_i = y\}$ , et utiliser un argument dit de réflexion (faire un dessin).
2. En déduire que  $\mathbf{P}(M_n \geq y) = 2\mathbf{P}(S_n \geq y) - \mathbf{P}(S_n = y)$  pour tout  $y \geq 1$ .
3. On pose  $M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ . Montrer que pour tout  $y \geq 1$ ,  $\mathbf{P}(M_\infty \leq y) = 0$ .  
On admettra qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\mathbf{P}(S_n = y) \leq C/\sqrt{n}$  pour tout  $n, y \geq 1$  (pas si dur, mais calculatoire).
4. En déduire que  $\mathbf{P}(M_\infty = +\infty) = 1$  (on a retrouvé le résultat de la question précédente).

**Exercice 0.24.** On prend  $p = 1/2$  de nouveau. On note  $T_0 = \inf\{n \geq 1; S_n = 0\}$ , et  $f_n = \mathbf{P}(T_0 = n)$ ,  $u_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$ . En particulier,  $u_0 = 1$ .

1. Montrer que pour tout  $n \geq 1$

$$u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \cdots + f_n u_0.$$

2. On considère les fonction génératrices  $F(s) = \sum_{n \geq 1} f_n s^n$  et  $U(s) = \sum_{n \geq 0} u_n s^n$  pour  $s \in [0, 1[$ . Montrer que  $U(s) = 1 + U(s)F(s)$ .
3. Calculer  $u_n$  pour tout  $n$ , puis calculer  $U(s)$ . En déduire  $F(s)$ , puis la valeur de  $f_n$  pour tout  $n$ .

## Exercices supplémentaires

- Exercice 0.25.**
1. Une urne contient  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ . On tire successivement sans remise  $n$  boules de l'urne ( $1 \leq n \leq N$ ). Quel est l'ensemble  $\Omega$  des résultats possibles? Calculer  $\text{card}(\Omega)$ , le cardinal de  $\Omega$ .
  2. Désormais, on suppose que les résultats possibles sont équiprobables. Les boules numérotées de 1 à  $M$  sont rouges ( $M < N$ ) et les boules numérotées de  $M + 1$  à  $N$  sont blanches. On introduit les événements  $A_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , définis par  $A_k = \{\text{la } k\text{-ième boule tirée est rouge}\}$ .
    - (a) Calculer les  $\mathbf{P}(A_k)$ .
    - (b) Calculer, pour  $k \neq l$ , les  $\mathbf{P}(A_k \cap A_l)$ .
  3. On introduit les variables aléatoires  $Z_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , définies par  $Z_k = 1$  si la  $k$ -ième boule tirée est rouge, et  $Z_k = 0$  sinon. On pose  $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ . On note  $p$  le rapport  $M/N$ .
    - (a) Calculer  $\text{Var}(S_n)$  en fonction de  $n$  et  $p$ .
    - (b) Calculer la limite de  $\text{Var}(S_n)$ ,  $n$  fixé, quand  $M$  et  $N$  tendent vers l'infini de telle sorte que  $p$  tende vers un réel  $p_0$ ,  $0 < p_0 < 1$ .

**Exercice 0.26.** Montrer qu'une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \geq 1)$  converge en probabilité vers une variable aléatoire  $X$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left( \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right) = 0.$$



**Exercice 0.27.** [Loi des grands nombres : preuve dans  $\mathbf{L}^4$ ]

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telles que  $\mathbf{E}(X_1^4) < \infty$ . On pose  $Z_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ .

1. On suppose pour l'instant que  $\mathbf{E}(X_1) = 0$ .
  - (a) Montrer que les espérances  $\mathbf{E}(X_1^3 X_2)$ ,  $\mathbf{E}(X_1^2 X_2 X_3)$  et  $\mathbf{E}(X_1 X_2 X_3 X_4)$  sont bien définies et donner leur valeur.
  - (b) Calculer  $\mathbf{E}Z_n^4$ .
  - (c) Montrer que la variable  $\sum_{n \in \mathbf{N}} Z_n^4$  est intégrable et en déduire que  $(Z_n)$  converge presque sûrement vers 0.
2. En retirant l'hypothèse  $\mathbf{E}X_1 = 0$ , déduire de la question précédente que  $(Z_n)$  converge vers  $\mathbf{E}X_1$  presque sûrement.

**Exercice 0.28.** [Loi des grands nombres : preuve dans  $\mathbf{L}^2$ ]

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telles que  $\mathbf{E}(X_1^2) < \infty$ . On pose  $Z_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ .

1. Calculer la variance de  $Z_n$ . En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que  $(Z_n)$  converge presque sûrement vers  $\mathbf{E}X_1$ .
2. Pour tout  $n$ , on note  $q_n$  la partie entière de  $\sqrt{n}$ , de sorte que  $q_n^2 \leq n < (q_n + 1)^2$ . En déduire que  $0 \leq n - q_n^2 \leq 2\sqrt{n} + 1$ .
3. En raisonnant comme en question 1, montrer que la suite  $(Z_n - \frac{q_n^2}{n} Z_{q_n^2})$  converge presque sûrement vers 0.
4. En déduire que  $(Z_n)$  converge presque sûrement vers  $\mathbf{E}X_1$ .

**Exercice 0.29.** [Loi des grands nombres : preuve dans  $\mathbf{L}^1$ ]

Soit  $(Y_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. On suppose que  $\mathbf{E}(|Y_1|) < \infty$ . On pose, pour  $n \geq 1$ ,

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n, \quad T_n = \max(S_1, \dots, S_n), \quad T = \sup_{k \in \mathbf{N}} S_k$$

$$\bar{S}_n = Y_2 + \dots + Y_n, \quad \bar{T}_n = \max(\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_n), \quad \bar{T} = \sup_{k \in \mathbf{N}} \bar{S}_k.$$

1. Montrer que  $\mathbf{P}(T = \infty) = \mathbf{P}(\bar{T} = \infty)$ .
2. Déduire de la loi 0 – 1 de Kolmogorov que  $\mathbf{P}(T = \infty) = 0$  ou 1.
3. Prouver la relation  $T_n - \bar{T}_n = \max(Y_1 - \bar{T}_n, Y_1)$ .
4. En déduire que si  $T = \infty$  p.s, alors  $\mathbf{E}(Y_1) \geq 0$ .
5. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d et intégrables. En appliquant la conclusion précédente aux variables  $Y_n = X_n - \mathbf{E}X_n - \varepsilon$  et  $Y'_n = -X_n + \mathbf{E}X_n - \varepsilon$  (pour  $\varepsilon > 0$  arbitraire), en déduire la loi forte des grands nombres :  $(X_1 + \dots + X_n)/n$  converge presque sûrement vers  $\mathbf{E}X_1$ .



# Chapitre 1

## Espérance conditionnelle

*Sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires sont définies sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .*

### Généralités et calculs

**Exercice 1.1.** (Questions de cours)

Soient  $A$  un événement et  $X$  une variable aléatoire réelle positive, resp. intégrable.

1. Soit  $B \in \mathcal{F}$  tel que l'on ait  $\mathbf{P}(B) > 0$  et  $\mathbf{P}(B^c) > 0$ . On introduit la sous-tribu  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}$  définie par  $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset, B, B^c\}$ . Donner :
  - les probabilités conditionnelles de  $A$  sachant  $B$ , de  $A$  sachant  $B^c$ .
  - la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $\mathcal{G}$ .
  - l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $B$ , de  $X$  sachant  $B^c$ .
  - l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{G}$ .
2. Soit  $(B_1, B_2, \dots, B_k, \dots)$  une partition dénombrable (finie ou infinie) de  $\Omega$  dans  $\mathcal{F}$  telle que  $\mathbf{P}(B_k) > 0, \forall k$ . Soit  $\mathcal{G} := \sigma(B_1, B_2, \dots, B_k, \dots)$ . Donner
  - la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $\mathcal{G}$ .
  - l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{G}$ .
3. Soit  $Y$  une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs  $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ . Donner
  - la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $Y$ .
  - l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$ .

**Exercice 1.2.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une famille de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et d'espérance  $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ . Soit  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$ , indépendante de la famille  $(X_n)_{n \geq 1}$ . On pose  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  (si  $N = 0$ , on pose par convention  $S = 0$ ).

1. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , calculer  $\mathbf{E}[S \mid N = n]$ . En déduire  $\mathbf{E}[S \mid N]$  puis  $\mathbf{E}[S]$ .
2. Pour  $r \in [0, 1]$ , calculer  $\mathbf{E}[r^S \mid N]$  en fonction de  $\varphi_{X_1}(r) = \mathbf{E}[r^{X_1}]$ . En déduire la fonction génératrice de  $S$  en fonction de celle de  $X_1$  et de celle de  $N$ .

**Exercice 1.3.** Soit  $N$  une variables aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et soit une suite  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de variables aléatoires i.i.d de loi uniformes sur  $[0, 1]$ . On note  $T = \min\{T_1, \dots, T_N\}$ , en utilisant la convention  $\min \emptyset = 1$  (c'est-à-dire que  $T$  vaut 1 sur l'évènement  $\{N = 0\}$ ).

1. Calculer  $\mathbf{P}(T > t \mid N = n)$  pour  $t \in [0, 1]$ .
2. Montrer que  $\mathbf{E}[T \mid N = n] = \frac{1}{n+1}$ , et en déduire  $\mathbf{E}[T \mid N]$ .
3. En déduire  $\mathbf{E}[T]$ .

**Exercice 1.4.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

1. Déterminer  $\mathbf{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n)$ .
2. Déterminer l'espérance conditionnelle  $\mathbf{E}(X_1 \mid X_1 + X_2)$ .
3. Mêmes questions en supposant que les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, de loi binomiale de paramètres respectifs  $(n_1, p)$  et  $(n_2, p)$ . On pourra utiliser le fait que si  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors  $\sum_{k=1}^n \xi_k$  suit la loi binomiale de paramètre  $(n, p)$ .

**Exercice 1.5.** Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires réelles sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , et  $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . Que peut-on dire, sous réserve d'hypothèses convenables, des espérances conditionnelles suivantes ?

1.  $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$  si  $X$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable ;
2.  $\mathbf{E}(XY \mid \mathcal{G})$  si  $X$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable ;
3.  $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$  si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{G}$  ;
4.  $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}))$ .

**Exercice 1.6.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de carré intégrable et soit  $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . Que peut-on dire de  $X$  si  $(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}))^2 = \mathbf{E}(X^2 \mid \mathcal{G})$  p.s. ?

**Exercice 1.7.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  des variables indépendantes à valeurs dans des espaces mesurés  $E_1$  et  $E_2$  respectivement, de lois respectives  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Soit  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction mesurable bornée (resp. positive).

1. Montrer que

$$\mathbf{E}[f(X_1, X_2) \mid X_1] = \int_{E_2} f(X_1, u) d\nu_2(u) \quad \text{p.s.}$$

2. Soit  $Z$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, 1]$  et soit  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$ , indépendante de  $Z$  et de fonction génératrice  $\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}(N = n)x^n$ . Montrer que  $\mathbf{E}(Z^N \mid Z) = \varphi(Z)$  p.s.
3. Soient  $X$  et  $U$  deux variables aléatoires réelles indépendantes et soit  $F$  la fonction de répartition de  $U$ . Montrer que  $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{U \leq X} \mid X) = F(X)$  p.s. Exprimer également la quantité  $\mathbf{E}(\exp(2\mathbf{1}_{U \leq X}) \mid X)$  à partir de  $F(X)$ .

**Exercice 1.8.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Quelle est l'espérance conditionnelle de  $(Y - X)^+$  sachant  $X$  ?

**Exercice 1.9.** [Partiel 2017] Soient  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux réels strictement positifs, et soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{R}_+$  respectivement telles que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,

$$\mathbf{P}(X = n, Y \leq t) = \mu \int_0^t \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)y} dy.$$

1. Quelle est la loi marginale de  $X$ ? Quelle est celle de  $Y$ ?  
On rappelle que pour tout  $a > 0$  et  $n \geq 1$ ,  $\int_0^\infty a^{n+1} y^n e^{-ay} dy = n!$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}[Y|X]$ .
3. Calculer  $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right]$ .
4. Calculer  $\mathbb{P}(X = n|Y) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X=n}|Y]$  ainsi que  $\mathbb{E}[X|Y]$ .

**Exercice 1.10.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  des variables aléatoires indépendantes, de lois exponentielles de même paramètre  $\lambda$ .

1. Calculer  $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2) | X_1]$  puis  $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2)]$ .
2. Calculer  $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2) | X_1 + X_2]$ .
3. Calculer  $\mathbf{E}[X_1 | \min(X_1, X_2)]$ .

**Exercice 1.11.** [Partiel 2016] Soit  $\alpha > 0$ . Soient  $B$  et  $U$  deux variables indépendantes telles que  $U$  est uniforme sur l'intervalle  $]0, 1[$ , et  $B$  est à valeurs positives et  $B^\alpha$  est intégrable. On définit la variable  $C$  par

$$C = f(B, U) = 2U(B + U^2)^\alpha.$$

Justifier que  $C$  est intégrable et calculer  $E(C|B)$ .

**Exercice 1.12.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle intégrable. On suppose que la loi de  $X$  est symétrique (c'est-à-dire,  $X$  a la même loi que  $-X$ ), et on pose  $Y = |X|$ .

1. Montrer que  $\mathbf{E}(X | Y) = \mathbf{E}(X)$  p.s.
2. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 1.13.** Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires réelles intégrables, et soit  $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ .

1. Montrer que  $\mathbf{E}(X | \mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(Y | \mathcal{G})$  p.s., si et seulement si  $\mathbf{E}(X \mathbf{1}_A) \leq \mathbf{E}(Y \mathbf{1}_A)$  pour tout  $A \in \mathcal{G}$ .
2. Montrer que  $\mathbf{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(Y | \mathcal{G})$  p.s., si et seulement si  $\mathbf{E}(X \mathbf{1}_A) = \mathbf{E}(Y \mathbf{1}_A)$  pour tout  $A \in \mathcal{G}$ .
3. Montrer que  $|\mathbf{E}(Z|\mathcal{G})| \leq \mathbf{E}(|Z||\mathcal{G})$ .

**Exercice 1.14.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle intégrable. Soient  $Z$  et  $\tilde{Z}$  des variables aléatoires à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  et  $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ , respectivement. On suppose que  $\mathbf{E}(X | Z, \tilde{Z})$  est  $\sigma(Z)$ -mesurable. Montrer que  $\mathbf{E}(X | Z, \tilde{Z}) = \mathbf{E}(X | Z)$  p.s.

## Variabes gaussiennes

**Exercice 1.15.** Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois variables aléatoires réelles gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose  $U = 2X_1 - X_2 - X_3, V = X_1 + X_2 + X_3, W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$ .

1. Quelles sont les lois de  $U, V$  et  $W$ ? Quels sont les couples indépendants parmi les couples  $(U, V), (U, W), (V, W)$ ?
2. Montrer qu'il existe  $a \in \mathbf{R}$  tel que  $W = aU + Z$  avec  $U$  et  $Z$  indépendantes. En déduire  $\mathbf{E}(W | U), \mathbf{E}(W^2 | U)$  et  $\mathbf{E}(W^3 | U)$ .

**Exercice 1.16.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose  $Z = X + Y, W = X - Y$ .

1. Montrer que  $Z$  et  $W$  sont indépendantes. Quelle est la loi de  $W$ ?
2. En déduire l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $Z$ .
3. Calculer  $\mathbf{E}(XY | Z)$  et  $\mathbf{E}(XYZ | Z)$ .

**Exercice 1.17.** [Partiel 2016] Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires normales centrées réduites  $\mathcal{N}(0, 1)$  indépendantes. On pose  $Z = X + 2Y$ . Montrer qu'il existe un unique  $a$  tel que  $X = aZ + W$  avec  $W$  indépendant de  $Z$ . En déduire l'expression de  $E(X|Z)$  et  $E(X^2|Z)$ .

**Exercice 1.18.** Soit  $Z = (X, Y)$  un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ . On suppose que  $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0, \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$  et que  $\text{Cov}(X, Y) = \rho$  avec  $|\rho| < 1$ . On pose  $U = X - \rho Y, V = \sqrt{1 - \rho^2}Y$ .

1. Calculer  $\mathbf{E}(X | Y)$ .
2. Quelles sont les lois de  $U$  et de  $V$ ? Les variables aléatoires  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes?
3. Calculer  $\mathbf{E}(U^2V^2), \mathbf{E}(UV^3), \mathbf{E}(V^4)$ . En déduire  $\mathbf{E}(X^2Y^2)$ .

**Exercice 1.19.** Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de variables aléatoires admettant la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right),$$

où  $\rho \in [0, 1[$ .

1. Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité sur  $\mathbf{R}^2$  et trouver les densités marginales de  $X_1$  et  $X_2$ . À quelle condition les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes?
2. On introduit les coordonnées polaires  $(R, \Phi)$  du couple  $(X_1, X_2)$  :  $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$  et  $\Phi \in [0, 2\pi[$  est définie par

$$\cos \Phi = \frac{X_1}{R} \quad \text{et} \quad \sin \Phi = \frac{X_2}{R} \quad \text{si } R > 0, \quad \Phi = 0 \quad \text{si } R = 0.$$

Déterminer la densité du couple  $(R, \Phi)$ , puis celle de  $\Phi$ .

3. Déterminer la densité de  $R$  lorsque  $\rho = 0$ . Que peut-on dire des variables aléatoires  $R$  et  $\Phi$  dans ce cas?

# Chapitre 2

## Filtration, temps d'arrêt et martingales

On rappelle les notations

$$s \wedge t := \min\{s, t\}, \quad s \vee t := \max\{s, t\}, \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Sauf mention du contraire, toutes les martingales sont définies sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbf{P})$ .

### 2.1 Filtrations, temps d'arrêt, martingales

**Exercice 2.1.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbf{P})$  un espace de probabilité filtré,  $T$  et  $S$  deux temps d'arrêt,  $\mathcal{F}_T$  et  $\mathcal{F}_S$  les tribus respectives des événements antérieurs à  $T$  et  $S$ . Montrer que (cf. cours)

1.  $S \wedge T, S \vee T, S + T$  sont des temps d'arrêt.
2. Si  $T$  est un temps d'arrêt constant ( $T = p$  avec  $p \in \mathbf{N}$ ), alors  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_p$ ,
3.  $T$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable,
4. Si  $S \leq T$ ,  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ ,
5.  $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ ,
6.  $T + S$  est  $\mathcal{F}_{T \vee S}$ -mesurable,
7.  $\{S < T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T, \{S = T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ .

**Exercice 2.2.** On considère une suite  $(X_n, n \geq 0)$  de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , indépendantes et de même loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On pose, pour  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$ . On introduit la variable aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 1; X_n > X_0\},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ .

1. Montrer que  $T$  est un temps d'arrêt de la filtration  $\mathcal{F}_n$ .
2. Déterminer la loi de  $T$ . Calculer son espérance.

**Exercice 2.3.** [Marche aléatoire et martingales]

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mathbf{P}(X_1 = +1) = p$  et  $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ , et soit la filtration  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . On note  $\mu = \mathbf{E}[X_1]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}X_1$ . On pose,  $S_0 = 0$  et pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

1. Montrer que  $S_n - n\mu$  et  $M_n := (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$  sont des martingales relativement à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .
2. Montrer que  $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$  est une martingale relativement à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .
3. On définit  $\psi(x) = pe^x + (1-p)e^{-x}$ , pour  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer que, pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $e^{\theta S_n} / \psi(\theta)^n$  est une martingale relativement à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

**Exercice 2.4.** Soit  $(\xi_n, n \geq 0)$ , une suite de variables réelles, indépendantes, centrées et de carrés intégrables :  $\mathbf{E}[\xi_n] = 0$  et  $\sigma_n^2 = \mathbf{E}[\xi_n^2] < \infty$ . On pose  $S_n = \xi_0 + \dots + \xi_n$  et on définit la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  par  $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_n)$ .

1. Montrer que  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une martingale relativement à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .
2. Montrer que  $\tau = \inf\{n; |S_n| \geq x\}$  est un temps d'arrêt.
3. En utilisant  $\tau$ , montrer l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq n} |S_i| \geq x\right) \leq x^{-2} \text{Var}(S_n),$$

valable pour tout réel  $x > 0$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ . La quantité  $\text{Var}(S_n)$  est la variance de  $S_n$ , que l'on calculera en fonction de  $(\sigma_i^2, i \geq 0)$ .

**Exercice 2.5.** Soit  $(\xi_n, n \geq 0)$ , une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, intégrables telles que  $\mathbf{E}[\xi_n] = 0$ , pour tout  $n \geq 0$ . On fixe  $p \geq 1$ , on pose  $X_0^{(p)} = X_1^{(p)} = \dots = X_{p-1}^{(p)} = 0$  et pour tout  $n \geq p$ , on pose

$$X_n^{(p)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_p}.$$

Montrer que  $(X_n^{(p)}, n \geq 0)$  est une martingale relativement à la filtration  $(\mathcal{F}_n)$ , donnée par  $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$  si  $n \geq 1$  et  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

**Exercice 2.6.** Soient  $(X_n, n \geq 0)$  et  $(Y_n, n \geq 0)$  deux sous-martingales pour une même filtration. Montrer que  $(X_n \vee Y_n, n \geq 0)$  est également une sous-martingale.

**Exercice 2.7.** Trouver une sous-martingale dont le carré n'est pas une sous-martingale (*Indication : faire très simple*).

**Exercice 2.8.** Soit  $T$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$  dont la loi est donnée par  $\mathbf{P}(T = n) = 1/(n(n+1))$ . On considère la suite de variables aléatoires réelles  $X_n = (n+1) \mathbf{1}_{T > n}$ .

1. Montrer que  $(X_n)$  est une martingale positive. Vérifier que  $X_n \rightarrow 0$  p.s.  $X_n$  converge-t-elle dans  $\mathbf{L}^1$  ?
2. Quelle est la loi de  $\sup_{n \geq 0} X_n$  ? En déduire  $\mathbf{E}(\sup_{n \geq 0} X_n)$ .



**Exercice 2.9.** Soient  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  deux  $(\mathcal{F}_n)$ -martingales de carré intégrable.

1. Montrer que, pour  $n \geq m$ ,  $\mathbf{E}(X_m Y_n | \mathcal{F}_m) = X_m Y_m$  p.s. et donc en particulier que  $\mathbf{E}(X_m X_n | \mathcal{F}_m) = X_m X_m$  p.s.
2. Montrer que, pour  $m < n \leq p < q$ ,  $\text{Cov}(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = 0$ .
3. Montrer que

$$\mathbf{E}((X_n - X_0)^2) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}((X_k - X_{k-1})^2).$$

**Exercice 2.10.** 1. *Décomposition de Doob.* Soit  $(X_n)$  une sous-martingale pour une filtration  $(\mathcal{F}_n)$ . Démontrer que  $X_n$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$X_n = M_n + A_n$$

où  $M_n$  est une martingale et  $A_n$  un processus croissant prévisible, i.e.  $0 = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n \leq \dots$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $A_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable. (Indication : introduire les différences  $X_k - \mathbf{E}[X_k | \mathcal{F}_{n-1}]$ .) On appelle cette décomposition *décomposition de Doob*.

2. *Exemple 1.* Soit  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  des variables aléatoires réelles i.i.d., définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . On suppose que  $\mathbf{E}(Y_1) = 0$  et que  $\mathbf{E}(Y_1^2) < \infty$ . On pose  $X_0 = 0$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ .
  - (a) Montrer que  $(X_n)$  est une martingale de carré intégrable et déterminer la décomposition de Doob de la sous-martingale  $(X_n^2)$  (on posera  $\sigma^2 = \mathbf{E}(Y_1^2)$ ).
  - (b) Soit  $T$  un temps d'arrêt (pour la filtration  $\mathcal{F}_n$ ) intégrable. Montrer que

$$\sup_n \mathbf{E}(X_{T \wedge n}^2) < \infty.$$

En déduire que  $\mathbf{E}(X_T^2) = \mathbf{E}(T)\sigma^2$ .

3. *Exemple 2.* On garde les hypothèses et notations précédentes. On suppose en particulier que les variables aléatoires  $Y_n$  ont pour loi commune :  $\mathbf{P}(Y_n = -1) = \mathbf{P}(Y_n = 1) = 1/2$ .

On pose

$$M_0 = 0 \text{ et, pour } n \geq 1, M_n = \sum_{k=1}^n \text{sgn}(X_{k-1})Y_k$$

où  $\text{sgn}(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $= -1$  si  $x < 0$ ,  $= 0$  si  $x = 0$ .

- (a) Montrer que  $(M_n)$  est une martingale de carré intégrable et déterminer la décomposition de Doob de la sous-martingale  $(M_n^2)$ .
- (b) Quelle est la décomposition de Doob de la sous-martingale  $(|X_n|, n \geq 0)$  ?
- (c) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $M_n$  est  $\sigma(|X_1|, \dots, |X_n|)$ -mesurable.

**Exercice 2.11.** On considère l'évolution du capital d'une assurance au cours du temps. Soit  $S_0 = x > 0$ , le capital initial,  $c > 0$  le montant des revenus des cotisations par an

et  $X_n \geq 0$  le coût des dommages pour l'année  $n$ . Le capital à la fin de l'année  $n$  est donc  $S_n = x + nc - \sum_{k=1}^n X_k$ . L'assurance est dite ruinée si son capital devient négatif, c'est-à-dire si le temps d'arrêt  $\tau = \inf\{k \geq 0; S_k < 0\}$  est fini.

On suppose  $(X_k, k \geq 1)$  i.i.d. positives avec  $\mathbf{E}(e^{\lambda X_k}) < \infty, \forall \lambda > 0$ . Le but ici est de majorer la probabilité de ruine  $\mathbf{P}(\tau < \infty)$ . On pose  $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

1. Vérifier que  $\mathbf{E}(X_1) > c$  implique  $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$ .
2. On suppose dorénavant que  $\mathbf{E}(X_1) < c$  et  $\mathbf{P}(X_1 > c) > 0$ . Soit  $\varphi(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda(X_1 - c)})$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $\varphi'' > 0, \varphi'(0) < 0$  et

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = \infty.$$

Dessiner le graphe de  $\varphi$  et montrer qu'il existe un et un seul  $\lambda_0 > 0$  tel que  $\mathbf{E}(e^{\lambda_0 X_1}) = e^{\lambda_0 c}$ .

3. Montrer que  $V_n = \exp(-\lambda_0 S_n + \lambda_0 x)$  est une martingale positive.
4. Pour  $N \geq 1$  montrer que

$$\mathbf{E}(V_N \mathbf{1}_{\{\tau \leq N\}}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{E}(V_k \mathbf{1}_{\{\tau = k\}}) \geq e^{\lambda_0 x} \mathbf{P}(\tau \leq N).$$

5. En déduire que  $\mathbf{P}(\tau < \infty) \leq e^{-\lambda_0 x}$ .

## Théorèmes d'arrêt

**Exercice 2.12.** (Partiel 2016) Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mathbf{P}(X_1 = +1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$ , et soit la filtration  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . On fixe un entier  $N \geq 1$ , et pour  $x \in \{0, \dots, N\}$ , on considère la marche aléatoire issue de  $x : S_0 = x$  et pour  $n \geq 1$   $S_n = x + \sum_{k=1}^n X_k$ .

1. Montrer que  $S_n$  et  $M_n := S_n^2 - n$  sont des martingales relativement à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .
2. On considère le temps  $T := \inf\{n; S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}$ . Montrer que  $T$  est un temps d'arrêt.
3. Pour  $m \geq 0$ , on introduit l'événement  $A_m = \{X_{mN+1} = \dots = X_{(m+1)N} = +1\}$ . Montrer que pour  $q \geq 1, \{T > qN\} \subset \bigcap_{m=0}^{q-1} A_m$ , et en déduire une majoration de  $\mathbf{P}(T > qN)$ . Montrer que  $\mathbf{E}[T] = \sum_{j \geq 0} \mathbf{P}(T > j) < +\infty$  et que  $T < +\infty$  p.s.
4. Calculer  $\mathbf{E}[S_T]$  et en déduire que  $\mathbf{P}(S_T = 0) = 1 - x/N$ .
5. Calculer  $\mathbf{E}[M_T]$  et en déduire  $\mathbf{E}[T]$ .

**Exercice 2.13.** (Un jeu de cartes à un seul joueur). On prend un jeu de 52 cartes, on les retourne une à une; le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire "rouge la prochaine!", il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire.

1. Soit  $R_n$  (pour  $0 \leq n \leq 51$ ) le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné  $n$  cartes. Soit  $A_n$  l'événement {la  $n$ -ième carte retournée est rouge}. Calculer  $\mathbf{P}(A_{n+1} | R_n = j)$ , pour  $j \in \{0, \dots, 26\}$ ,  $n \in \{0, \dots, 51\}$ ,  $0 \leq j \leq 52 - n$ .
2. Calculer  $\mathbf{P}(R_{n+1} = j | R_n) = \mathbf{P}(R_{n+1} = j | \mathcal{F}_n)$ , où  $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$ ,  $n \in \{0, \dots, 50\}$ ,  $j \in \{0, \dots, 26\}$ . Montrer que

$$\mathbf{E}(R_{n+1} | \mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}, \quad n = 0, \dots, 51.$$

Montrer que  $X_n := R_n/(52 - n)$ ,  $n = 0, \dots, 51$ , est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)$  et que  $X_n = \mathbf{P}(A_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ .

3. Le joueur décide d'annoncer "*rouge la prochaine!*" après avoir retourné  $\tau$  cartes, où  $\tau$  est un temps d'arrêt. Montrer que la probabilité de victoire est  $\mathbf{E}(X_\tau)$ . En déduire que pour toute stratégie, la probabilité de victoire dans ce jeu est toujours la même et la calculer.

**Exercice 2.14.** Soit  $(\xi_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que  $\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = \mathbf{P}(\xi_1 = -1) = 1/2$ . La variable aléatoire  $\xi_n$  s'interprète comme un pari qui est gagné si  $\xi_n = 1$  et qui est perdu si  $\xi_n = -1$ . À l'étape  $n$  du jeu, un joueur mise une certaine somme  $S_n > 0$ , il remporte  $2S_n$  (en faisant ainsi un gain de  $S_n$ ) si  $\xi_n = 1$  (il gagne le pari) et perd sa mise si  $\xi_n = -1$  (il perd le pari). On pose  $X_0 = S_0 = 0$  et  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  et pour tout  $n \geq 1$ , on pose

$$X_n = S_1\xi_1 + \dots + S_n\xi_n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

La variable aléatoire  $X_n$  représente le gain algébrique du joueur après la  $n$ -ième partie. Comme le joueur ne devine pas l'avenir,  $S_n$  ne dépend que de  $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ , c'est-à-dire que  $(S_n, n \geq 1)$  est  $(\mathcal{F}_n)$ -prévisible. On suppose que pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n$  est intégrable.

1. Montrer que  $(X_n, n \geq 0)$  est une  $(\mathcal{F}_n)$ -martingale.
2. Le joueur adopte la stratégie suivante : à chaque pari qu'il perd, le joueur double la mise pour le pari suivant. Il arrête de jouer lorsqu'il gagne au moins une fois. On suppose qu'il part d'une mise initiale de deux euros. On a alors  $S_n = 2^n \mathbf{1}_{\{T \geq n\}}$  où  $T$  désigne la première fois où le joueur gagne.

$$T = \inf\{n \geq 1 : \xi_n = 1\}.$$

Montrer que  $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ . Calculer le gain moyen du joueur, c'est-à-dire  $\mathbf{E}[X_T]$ . Si cela vous semble merveilleux, calculez  $\mathbf{E}[X_{T-1}]$  qui est la perte moyenne du joueur juste avant qu'il ne gagne. Que pensez-vous de cette stratégie ?

3. On suppose que le joueur ne dispose que d'une réserve d'argent égale à  $2^{n_0} - 2$  euros (avec  $n_0 \geq 1$ ) et que les mises doivent être payées comptant, ce qui force le joueur à quitter le jeu lorsqu'il n'a plus d'argent. Il choisit prudemment de s'arrêter la première fois qu'il gagne. Quelle est la probabilité qu'il termine le jeu faute d'argent à jouer ? Si on ne joue qu'une fois à ce jeu dans sa vie, faut-il jouer ? Quelle est le gain (algébrique) moyen ?

**Exercice 2.15.** [Partiel 2017] Soit  $(Z_n)$  une suite de variables aléatoires i.i.d. dont la loi est donnée par

$$\mathbf{P}(Z_n = 1) = \mathbf{P}(Z_n = -1) = 1/2.$$

Soit  $S_0 = 0$  et  $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$  pour  $n \geq 1$ . On définit  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$  pour  $n \geq 1$ .

Soit  $a \in \mathbf{N}^*$  et  $\lambda$  tel que  $0 < \lambda < \frac{\pi}{2a}$ . Enfin, on définit  $\tau = \inf\{k \in \mathbf{N} : |S_k| = a\}$  le temps de sortie de l'intervalle  $] -a, a[$ .

1. Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt.
2. Montrer que  $X_n = (\cos(\lambda))^{-n} \cos(\lambda S_n)$  est une martingale.
3. Montrer que  $\mathbf{E}(X_{n \wedge \tau}) \geq \cos(\lambda a) \mathbf{E}(\cos(\lambda)^{-n \wedge \tau})$ .
4. Montrer que  $\mathbf{E}(\cos(\lambda)^{-\tau}) \leq (\cos(\lambda a))^{-1}$  et que  $\tau < \infty$  p.s..
5. Montrer que la martingale  $(X_{n \wedge \tau})$  est fermée.
6. Que vaut  $\mathbf{E}(\cos(\lambda)^{-\tau})$ ? Est-il vrai que  $\tau$  appartienne à  $\mathbf{L}^p$  pour tout  $p \geq 1$ ?

**Exercice 2.16.** [Examen 2019] Donner un énoncé précis et une démonstration du fait suivant : lorsqu'une sur-martingale positive atteint 0, elle y reste.

## Convergence de martingales

**Exercice 2.17.** Soient  $Y_1, Y_2, \dots$  des variables aléatoires i.i.d. telles que

$$\mathbf{P}(Y_1 = -1) = q, \quad \mathbf{P}(Y_1 = 1) = p, \quad \text{avec } p + q = 1, \quad 0 < p < q < 1.$$

On pose  $X_0 = 0$ ,  $Z_0 = 1$ , et pour  $n \geq 1$ ,  $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ ,  $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}$ .

1. Montrer que  $(Z_n)$  est une martingale positive. Montrer que  $Z_n \rightarrow 0$  p.s.
2. On pose, pour  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $T_k = \inf\{n \geq 0 ; X_n \geq k\}$ . En considérant la martingale  $(Z_{T_k \wedge n})$  et la décomposition

$$Z_{T_k \wedge n} = Z_{T_k \wedge n} \mathbf{1}_{\{T_k < \infty\}} + Z_{T_k \wedge n} \mathbf{1}_{\{T_k = \infty\}},$$

montrer que

$$\mathbf{P}(T_k < \infty) = \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

3. En déduire que  $\sup_{n \geq 0} X_n$  suit une loi géométrique de paramètre  $1 - p/q$ , et ainsi que

$$\mathbf{E}(\sup_{n \geq 0} X_n) = \frac{p}{q - p}.$$

**Exercice 2.18.** Soient  $Y_1, Y_2, \dots$  des variables aléatoires i.i.d. telles que  $\mathbf{P}(Y_1 = 1) = p$ ,  $\mathbf{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$ , avec  $0 < p < 1$ . On pose

$$S_0 = 0, \quad S_n = Y_1 + \cdots + Y_n, \quad n \geq 1, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$$

et, pour tout  $\theta$  réel,

$$\varphi(\theta) = \mathbf{E}(e^{\theta Y_1}), \quad X_n = \frac{e^{\theta S_n}}{\varphi(\theta)^n}.$$

1. Donner le tableau de variation de la fonction  $\theta \mapsto \varphi(\theta)$ .
2. Montrer que  $(X_n)$  est une martingale et que, dans le cas où  $\theta \neq 0$ ,  $X_n$  converge p.s. vers 0.
3. Soit  $T = \inf \{n > 0; S_n = 1\}$ . Montrer que, pour  $\theta > \max(0, \ln(q/p))$ , on a

$$\mathbf{E}(\varphi(\theta)^{-T} \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}) = e^{-\theta}.$$

En déduire que  $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$  si  $p \geq q$ ,  $\mathbf{P}(T < \infty) = p/q$  si  $p < q$ , et

$$\mathbf{E}(s^T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs} \quad (0 \leq s \leq 1).$$

**Exercice 2.19.** Soit  $(\sigma_n, n \geq 1)$  une suite i.i.d. telle que  $\mathbf{P}(\sigma_n = 1) = \mathbf{P}(\sigma_n = -1) = \frac{1}{2}$ . Introduire une martingale opportune pour montrer la convergence p.s. de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n}.$$

**Exercice 2.20.** On considère un jeu de hasard entre un joueur et le croupier d'un casino. Le capital total en jeu est 1 : après la  $n$ -ième partie le capital du joueur est  $X_n \in [0, 1]$  et le capital du croupier est  $1 - X_n$ . Au début le capital du joueur est une constante  $X_0 = p \in ]0, 1[$  et le capital du croupier est  $1 - p$ .

La règle du jeu est que, après les  $n$  premières parties, la probabilité pour le joueur de gagner l' $(n + 1)$ -ième partie est  $X_n$ , et la probabilité de perdre est  $1 - X_n$  ; si le joueur gagne, il obtient la moitié du capital du croupier ; s'il perd, il cède la moitié de son capital au croupier.

Plus précisément, on se donne une suite de variables aléatoires  $(U_n)_{n \geq 1}$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , indépendantes entre elles et indépendantes de  $X_0$ , et on pose :

$$X_{n+1} = \left( X_n + \frac{1 - X_n}{2} \right) \mathbf{1}_{U_{n+1} < X_n} + \frac{X_n}{2} \mathbf{1}_{U_{n+1} \geq X_n}.$$

On considère alors la filtration  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n) = \sigma(X_0, U_1, \dots, U_n)$ .

1. Prouver que  $(X_n)$  est une martingale pour la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .
2. Prouver que  $X_n$  converge p.s. et dans  $\mathbf{L}^2$  vers une variable  $Z$ .
3. Prouver que  $\mathbf{E}(X_{n+1}^2) = \mathbf{E}(3X_n^2 + X_n)/4$ . En déduire que  $\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}(Z) = p$ .
4. Prouver que toute variable aléatoire  $W$ , telle que  $0 \leq W \leq 1$  et  $\mathbf{E}(W(1 - W)) = 0$ , est une variable aléatoire de Bernoulli. En déduire la loi de  $Z$ .
5. Pour tout  $n \geq 0$ , soit  $Y_n := 2X_{n+1} - X_n$ . Montrer que

$$\mathbf{P}(Y_n = 0 \mid \mathcal{F}_n) = 1 - X_n, \quad \mathbf{P}(Y_n = 1 \mid \mathcal{F}_n) = X_n,$$

et en déduire la loi de  $Y_n$ .

6. Considérer les événements  $G_n := \{Y_n = 1\}$ ,  $P_n := \{Y_n = 0\}$ . Prouver que  $Y_n \rightarrow_n Z$  p.s. et en déduire que

$$\mathbf{P} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} G_n \right) = p, \quad \mathbf{P} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n \right) = 1 - p.$$

Les variables aléatoires  $Y_n$ ,  $n \geq 0$ , sont-elles indépendantes ?

7. Quelle est l'interprétation des résultats des points 4, 5 et 6 en termes de victoire/perte du joueur ?

**Exercice 2.21.** On a une population de taille fixée  $N \in \mathbf{N}^*$  qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type  $a$  ou  $A$ . Chaque individu de la génération  $n + 1$  choisit son (seul) parent de la génération  $n$  de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite le type du parent.

On note  $X_n$  le nombre d'individus de type  $a$  dans la génération  $n$  et on pose  $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$ . On a alors  $\mathbf{P}(X_{n+1} = i | \mathcal{F}_n) = \binom{N}{i} \left(\frac{X_n}{N}\right)^i \left(1 - \frac{X_n}{N}\right)^{N-i}$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$ . On suppose que p.s.  $X_0 = k \in \{0, \dots, N\}$ .

1. Montrer que  $(X_n, n \geq 0)$  est une martingale et discuter la convergence de  $X_n$  vers une variable  $X_\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
2. Montrer que  $M_n := \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$  est une martingale.
3. Calculer  $\mathbf{E}(X_\infty)$  et  $\mathbf{E}(X_\infty(N - X_\infty))$ .
4. Calculer la loi de  $X_\infty$  et commenter.

**Exercice 2.22.** Soient  $(\xi_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $(\alpha_n, n \geq 1)$  une suite de réels. On pose  $X_0 := 1$  et  $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ , et pour  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad X_n = \exp \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right).$$

1. Montrer que  $(X_n)$  est une  $(\mathcal{F}_n)$ -martingale et que  $X_n$  converge p.s.
2. On suppose que  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \infty$ . En considérant la suite  $(X_n^\lambda)_{n \geq 1}$  pour un  $\lambda > 0$  bien choisi. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$  p.s. La martingale  $(X_n)$  est-elle fermée ?

**Exercice 2.23.** [Urne de Polya à deux couleurs] On considère qu'une urne contient, à l'instant 0,  $a > 0$  boules rouges et  $b > 0$  boules blanches. On suppose que l'on dispose, à côté, d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges. À l'étape 1, on tire une boule au hasard dans l'urne : si elle est blanche, on remet cette boule en y ajoutant une boule blanche prise dans le stock ; si la boule tirée est rouge, on la remet et on y ajoute une boule rouge prise dans le stock. On fait de même à l'étape 2, 3 ... etc, en supposant qu'à chaque étape les tirages sont uniformes et indépendants. On note  $B_n$  le nombre de boules blanches à l'instant  $n$ , d'où il y a au total  $a + b + n$  boules dans l'urne. La proportion de boules blanches à l'instant  $n$  est notée  $X_n = B_n / (a + b + n)$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(B_0, \dots, B_n)$ .

1. Montrer que  $(X_n, n \geq 0)$  est une  $(\mathcal{F}_n)$ -martingale positive avec  $|X_n| \leq 1, \forall n \geq 0$ . En déduire que la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty$  a lieu presque sûrement et dans  $\mathbf{L}^p$ , pour tout  $p \in [1, \infty[$ .

2. Montrer que la limite  $X_\infty$  vérifie  $\mathbf{P}(X_\infty = 0) < 1$  et  $\mathbf{P}(X_\infty = 1) < 1$ . Qu'est-ce-que cela signifie sur la coloration de l'urne au cours du temps et asymptotiquement ?
3. On fixe  $k \in \mathbf{N}$ , et pose, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$Y_n^{(k)} = \frac{B_n(B_n + 1) \cdots (B_n + k - 1)}{(a + b + n)(a + b + n + 1) \cdots (a + b + n + k - 1)}.$$

Montrer que  $(Y_n^{(k)}, n \geq 0)$  est une  $(\mathcal{F}_n)$ -martingale positive, avec  $|Y_n^{(k)}| \leq 1, \forall n$ . En déduire qu'elle converge p.s. et dans  $\mathbf{L}^1$  vers une limite notée  $Y_\infty^{(k)}$ . Calculer  $\mathbf{E}[Y_\infty^{(k)}]$  en fonction de  $b$  et de  $a$ .

4. Montrer que  $Y_\infty^{(k)} = (X_\infty)^k$  p.s. En déduire  $\mathbf{E}[(X_\infty)^k]$  explicitement en fonction de  $b$  et de  $a$ .
5. Soit  $Z$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, 1]$  dont la loi admet la densité  $f(x) = C_{a,b}(1-x)^{a-1}x^{b-1}$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Trouver la constante  $C_{a,b}$ . Montrer que  $\mathbf{E}[Z^k] = \mathbf{E}[(X_\infty)^k]$ , pour tout  $k \in \mathbf{N}$ . En déduire que  $Z$  et  $X_\infty$  ont la même loi, autrement dit que  $X_\infty$  suit la loi bêta de paramètres  $a$  et  $b$ .

**Exercice 2.24.** Soit  $(U_n, n \geq 0)$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que  $\mathbf{P}(U_n = 1) = p, \mathbf{P}(U_n = 0) = q = 1 - p, 0 < p < 1$ . On pose

$$T = \inf\{n \geq 0 ; U_n = 1\}, \quad T = \infty \text{ si } U_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Pour  $n \geq 0$  on pose  $X_n = \frac{1}{q^n} \mathbf{1}_{\{T > n\}}$ .

1. Montrer que  $(X_n)$  est une martingale (on précisera la filtration  $(\mathcal{F}_n)$ ).
2. Montrer que  $X_n$  converge p.s. vers 0.
3. A-t-on  $\sup_n \mathbf{E}(|X_n|) < \infty$ ? A-t-on  $\sup_n \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ ?
4. La martingale  $(X_n)$  est-elle fermée ?
5. La suite  $Y_n = \sqrt{X_n}$  est-elle uniformément intégrable ?

**Exercice 2.25.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , avec  $\sigma^2 \in ]0, \infty[$ . Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , soit  $\eta_k$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, \varepsilon_k^2)$ , avec  $\varepsilon_k > 0$ . On suppose que  $X, \eta_0, \eta_1, \dots$  sont indépendantes. On définit  $Y_k = X + \eta_k, k \in \mathbf{N}$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n), n \in \mathbf{N}, \mathcal{F}_\infty = \sigma(Y_n, n \geq 0)$ .

Nous essayons de mesurer une quantité aléatoire  $X$  avec une suite indépendante d'expériences. L'expérience  $k$  donne comme résultat  $Y_k = X + \eta_k$ , où  $\eta_k$  est une erreur qui dépend de la précision des instruments. Après  $n$  expériences, la meilleure prévision possible sur  $X$  est

$$X_n := \mathbf{E}(X | \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X | Y_0, \dots, Y_n).$$

On se demande s'il est possible d'obtenir la valeur de  $X$  quand  $n$  tend vers l'infini, et notamment si  $X_n$  converge vers  $X$ .

1. Montrer que  $(X_n)$  est une martingale et que  $X_n$  converge p.s. et dans  $\mathbf{L}^1$  vers une variable aléatoire  $X_\infty$ . Quelle est la relation entre  $X$  et  $X_\infty$  ?

2. Montrer que  $\sup_n \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
  - a)  $X_n \rightarrow X$  dans  $\mathbf{L}^2$  ; b)  $X_n \rightarrow X$  dans  $\mathbf{L}^1$  ; c)  $X$  est  $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable.
3. Calculer  $\mathbf{E}(Y_i Y_j)$ ,  $\mathbf{E}(Y_i^2)$  et  $\mathbf{E}(X Y_i)$  pour  $i, j \geq 0$ ,  $i \neq j$ . Montrer que pour tous  $n \geq 0$  et  $i = 0, \dots, n$ , on a  $\mathbf{E}(Z_n Y_i) = 0$ , où

$$Z_n := X - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2} Y_j.$$

4. Montrer que pour tout  $n \geq 0$  la variable  $Z_n$  est indépendante de  $\{Y_0, \dots, Y_n\}$  et en déduire que  $X_n = X - Z_n$ .
5. Calculer  $\mathbf{E}((X - X_n)^2)$  et montrer que  $X_n \rightarrow X$  dans  $\mathbf{L}^2$  si et seulement si  $\sum_{i=0}^\infty \varepsilon_i^{-2} = \infty$ .
6. Discuter le cas  $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$  pour tout  $i \geq 0$ , notamment les liens avec la loi des grands nombres.

**Exercice 2.26.** [D'après l'examen 2020] Alexandre affirme qu'une sur-martingale  $(X_n)_{n \geq 0}$  ne peut pas tendre presque sûrement vers  $+\infty$ . Il argumente qu'une telle sur-martingale serait minorée et par conséquent convergerait vers une variable aléatoire finie. Bertrand est assez d'accord avec Alexandre et donne un autre argument par l'absurde : la suite  $(\mathbf{E}(X_n))_{n \geq 0}$  est décroissante, et si  $\liminf_n X_n = \lim_n X_n = +\infty$  p.s on aurait par Fatou :

$$+\infty = \mathbf{E}[\liminf_n X_n] \leq \liminf_n \mathbf{E}[X_n] \leq \mathbf{E}[X_0] < +\infty.$$

Cécile n'est pas d'accord avec les arguments précédents et affirme qu'elle sait construire un exemple de sur-martingale qui tend presque sûrement vers  $+\infty$ . Qui croire ?

**Exercice 2.27.** Soit  $(Y_n, n \geq 0)$  une suite de variables aléatoires réelles positives définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  indépendantes et de même espérance 1. On pose, pour  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$  et  $X_n = Y_0 \cdots Y_n$ .

1. Montrer que  $X_n$ , resp.  $\sqrt{X_n}$ , est une  $(\mathcal{F}_n)$ -martingale, resp. surmartingale.
2. Montrer que le produit infini  $\prod_{k=0}^\infty \mathbf{E}(\sqrt{Y_k})$  converge dans  $\mathbf{R}_+$ . On note  $\ell$  sa limite.
3. On suppose que  $\ell = 0$ . Montrer que  $\sqrt{X_n} \rightarrow 0$  p.s. La martingale  $(X_n)$  est-elle fermée ?
4. On suppose  $\ell > 0$ . Montrer que  $\sqrt{X_n}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbf{L}^2$ . En déduire que  $(X_n)$  est fermée.
5. Application

Soient  $p$  et  $q$  deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable  $E$  et  $(Z_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $E$  et de même loi  $q$ . On suppose que, pour tout  $x \in E$ ,  $q(x) > 0$  (notations :  $p(x) := p(\{x\})$  et  $q(x) := q(\{x\})$ ,  $x \in E$ ). On pose

$$X_n = \frac{p(Z_0)}{q(Z_0)} \cdots \frac{p(Z_n)}{q(Z_n)}.$$

À partir de ce qui précède, montrer que  $X_n \rightarrow 0$  p.s.



**Exercice 2.28.** On sait (cf. cours) que, pour une martingale  $(X_n)$ ,  $\mathbf{E}[(\sup_{n \geq 0} |X_n|)^2] \leq 4 \sup_{n \geq 0} \mathbf{E}(X_n^2)$  : ainsi, si  $\sup_{n \geq 0} \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ , alors,  $\sup_{n \geq 0} |X_n| \in \mathbf{L}^2$ .

Dans cet exercice on se propose de prouver que, si  $\sup_{n \geq 0} \mathbf{E}[|X_n| \ln^+(|X_n|)] < \infty$ , alors  $\sup_n |X_n| \in \mathbf{L}^1$ . [Notation :  $\ln^+ x := \ln \max\{x, 1\}$ .]

Soit  $(X_n)$  une martingale.

1. Montrer que, pour  $u \geq 1$ ,  $\frac{1}{u} \ln u \leq \frac{1}{e}$ . En déduire que pour tous réels  $0 < x \leq y$ , on a  $x \ln y \leq x \ln x + \frac{y}{e}$ , puis  $x \ln y \leq x \ln^+ x + \frac{y}{e}$ , et enfin  $x \ln^+ y \leq x \ln^+ x + \frac{y}{e}$ .
2. Rappelons la version suivante de l'inégalité maximale : si  $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une sous-martingale, alors  $\lambda \mathbf{P}(\max_{0 \leq k \leq n} M_k \geq \lambda) \leq \mathbf{E}(M_n \mathbf{1}_{\{\max_{0 \leq k \leq n} M_k \geq \lambda\}})$  pour tout entier  $n \geq 0$  et tout réel  $\lambda \geq 0$ .

À partir de l'inégalité maximale appliquée à la sous-martingale  $(|X_n|)$ , montrer que

$$\int_1^\infty \mathbf{P}(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq a) da \leq \int_\Omega |X_n| \ln^+ (\max_{0 \leq k \leq n} |X_k|) d\mathbf{P}.$$

3. Conclure que

$$\mathbf{E}(\sup_{n \geq 0} |X_n|) \leq \frac{e}{e-1} (1 + \sup_{n \geq 0} \mathbf{E}(|X_n| \ln^+ |X_n|)).$$

**Exercice 2.29. [Pour aller plus loin]**

Le but de cet exercice atypique est de traiter de manière probabiliste par la théorie des martingales deux questions d'analyse. Pour cela, nous allons construire un espace de probabilité filtré explicite. Soit  $\Omega = [0, 1[$  et  $\mathcal{F}$  la tribu borélienne sur  $\Omega$ . Soit  $\mathbf{P}$  la mesure de Lebesgue sur  $\Omega$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $0 \leq k \leq 2^n - 1$ , soit  $B_{n,k} = [k/2^n, (k+1)/2^n[$ . Soit  $\mathcal{F}_n$  la sous-tribu de  $\mathcal{F}$  engendrée par la partition  $(B_{n,k})_{0 \leq k < 2^n}$ . Nous rappelons que la tribu engendrée par toutes les  $\mathcal{F}_n$  est la tribu borélienne.

Toute fonction mesurable  $F$  sur  $[0, 1[$  à valeurs réelles peut ainsi être considérée comme une variable aléatoire sur  $\Omega$ .

1. Montrer que les  $\mathcal{F}_n$  forment une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .
2. Montrer que pour tout  $n \geq 1$  et  $0 \leq k < 2^n$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{B_{n,k}} | \mathcal{F}_{n-1}) = (1/2) \mathbf{1}_{B_{n-1,p(k)}}$  où  $p(k)$  est l'unique entier tel que  $k = 2p(k)$  ou  $k = 2p(k) + 1$ .
3. Supposons  $F$  intégrable sur  $[0, 1[$ . Soit  $F_n = \mathbf{E}(F | \mathcal{F}_n)$ . Montrer que, pour presque tout  $x \in \Omega$ ,

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( 2^n \int_{B_{n,k}} F(x) dx \right) \mathbf{1}_{B_{n,k}}(x)$$

4. Montrer que  $(F_n, n \geq 0)$  est une martingale et étudier sa convergence presque sûre et dans  $\mathbf{L}^1$ .
5. En déduire le résultat d'analyse suivant : toute fonction  $f$  intégrable sur  $[0, 1[$  est égale presque partout à la limite de ses moyennes locales  $2^n \int_{B_{n,[2^n x]} f(x) dx$ .

6. Supposons que  $F$  admette une limite  $l$  en 1 et que  $F$  étendue sur  $[0, 1]$  soit  $K$ -Lipschitz. Soit  $G_n$  la fonction définie pour tout  $x \in \Omega$  par :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \left( F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right) \right) \mathbf{1}_{B_{n,k}}(x)$$

avec la convention  $F(1) = l$ . Montrer que  $|G_n(x)| < K$  pour tout  $x \in [0, 1[$  et que, pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a

$$\left| F_n(x) - F(0) - \int_0^x G_n(u) du \right| \leq 2K/2^n$$

7. Montrer que  $G_n$  est une martingale pour la filtration  $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$  et montrer que  $\sup_n \mathbf{E}(G_n^2) < \infty$ . Conclure au sujet de la convergence presque sûre, dans  $\mathbf{L}^1$  et dans  $\mathbf{L}^2$  de  $G_n$  vers une variable aléatoire  $G$ . Conclure également au sujet de la convergence presque sûre de  $\int_0^x G_n(u) du$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
8. En déduire proprement le résultat d'analyse suivant : pour toute fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  intégrable et  $K$ -Lipschitz, montrer qu'il existe une fonction  $g$  mesurable bornée sur  $[0, 1]$  telle que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on ait  $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u) du$ .

# Chapitre 3

## Chaînes de Markov

### Matrices de transition, calculs

**Exercice 3.1.** Une chaîne de Markov à valeurs dans  $\{0, 1\}$  a toujours une matrice de transition de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

1. Décrire la chaîne dans les cas où  $p$  et  $q$  sont dans  $\{0, 1\}$ .

On supposera par la suite que  $(p, q) \neq (1, 1)$ .

2. Calculer  $M^n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = i \mid X_0 = j)$  pour tout  $i, j \in \{0, 1\}$ .
3. Un virus peut exister sous  $N$  formes différentes. À chaque instant, avec probabilité  $1-a$ , il reste sous sa forme où il est, ou avec la probabilité respective  $a$ , il mute sous une forme différente, uniformément choisie parmi les autres  $N-1$  formes. Quelle est la probabilité que la forme du virus au temps  $n$  est la même qu'au temps 0 ?

Suggestion : réduire le problème à l'analyse d'une chaîne de Markov à deux états.

**Exercice 3.2.** À une probabilité quelconque  $(p_i)_{i \geq 1}$  sur  $\{1, 2, \dots\}$  on associe une chaîne de Markov  $(X_n, n \geq 0)$  à valeurs dans  $\mathbf{N}$ , de loi initiale  $\delta_0$  et de matrice de transition  $Q$  définie par

$$Q(0, i) = p_{i+1}, \quad Q(i+1, i) = 1, \quad i \geq 0.$$

On pose  $S = \inf\{n \geq 1; X_n = 0\}$ , avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$  (premier temps de retour à l'origine). Quelle est la loi de  $S$  ?

**Exercice 3.3.** Un joueur fréquente trois casinos numérotés 1, 2 et 3. Chaque jour il choisit l'un des deux casinos où il n'est pas allé la veille suivant une même probabilité  $\frac{1}{2}$ . Le premier jour, jour 0, il choisit l'un des trois casinos suivant une loi de probabilité  $\mu$  sur  $E := \{1, 2, 3\}$ . On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du casino fréquenté par le joueur le jour  $n$ . On considérera la suite  $(X_n, n \geq 0)$  comme une chaîne de Markov définie sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  sous les lois  $\mathbf{P}_\mu$ ; on précisera la matrice de transition  $Q$ .

1. Calculer les puissances  $Q^n$  de  $Q$ , puis  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n$ .
2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\mu(X_n = j)$ , pour  $j = 1, 2$  et  $3$ .

**Exercice 3.4.** Soient  $(Y_n, n \geq 1)$  une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$  et  $X_0 := 0, X_n := Y_1 + \dots + Y_n$  pour  $n \geq 1$ . Remarquer que  $X_{n+1} \geq X_n$  p.s. pour tout  $n$ . Soit pour tout  $y \in \mathbf{N}$  le temps d'arrêt  $T_y := \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$  ( $\inf \emptyset := \infty$ ).

1. Montrer, à l'aide de la loi des grands nombres, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$  p.s. et en déduire que  $\mathbf{P}(T_y < \infty) = 1$ .
2. Montrer que  $M_n := X_n - np$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)$  engendrée par  $(X_n)$ .
3. Calculer  $\mathbf{E}(T_y)$ , en utilisant la martingale arrêtée  $(M_{n \wedge T_y})$ .

Soit  $N(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}$  le nombre de visites de  $(X_n)$  à  $y \in \mathbf{N}$ .

4. Calculer  $\mathbf{1}_{\{X_k=y\}}$  sur les événements  $\{k < T_y\}$ ,  $\{T_y \leq k < T_{y+1}\}$  et  $\{k \geq T_{y+1}\}$ , respectivement. En déduire que  $N(y) = T_{y+1} - T_y$  p.s. et la valeur de  $\mathbf{E}[N(y)]$ .

On remarque que  $(X_n)$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $Q$  donnée par  $Q(x, x) = 1 - p, Q(x, x + 1) = p, x \in \mathbf{N}$  (on ne demande pas de le prouver).

5. Calculer la loi de  $X_n$  et la loi de  $T_1$
6. Prouver, à l'aide de la loi de Markov forte et du point 4, que  $N(y)$  a même loi que  $T_1$ .
7. Calculer la loi de  $T_y$ .

**Exercice 3.5.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de variables aléatoires qui sous la probabilité  $\mathbf{P}_\mu$  est une chaîne de Markov à valeurs dans  $E$  dénombrable, de matrice de transition  $Q$ .

1. Soit  $T$  un temps d'arrêt tel que  $\mathbf{P}_\mu(T < \infty) = 1$ . Que peut-on dire de la suite  $(X_{T+n}, n \geq 0)$  ?
2. Soit  $S = \mathcal{S}((X_n)_{n \geq 0})$  un temps d'arrêt tel que, pour tout  $x \in E, \mathbf{P}_x(S < \infty) = 1$ . On pose  $S_0 = 0$  et pour  $n \geq 0$ ,

$$S_{n+1} = S_n + \mathcal{S}((X_{S_n+k})_{k \geq 0}).$$

- (a) Montrer que, pour tout  $x \in E$ , les  $S_n$  sont  $\mathbf{P}_x$ -p.s. finis.
- (b) Montrer que la suite  $(X_{S_n}, n \geq 0)$  associée à la filtration  $(\mathcal{F}_{S_n}, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par

$$Q_S(x, y) = \mathbf{P}_x(X_S = y).$$

**Exercice 3.6.** Dans cet exercice on considère une suite  $(X_k, k \geq 0)$  de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$  et une famille de probabilités  $\mathbf{P}_\mu$  telles que sous  $\mathbf{P}_\mu, X_0$  suit la loi  $\mu$  et la suite  $(X_k)_{k \geq 1}$  est i.i.d. de loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On peut voir  $(X_k)_{k \geq 0}$  comme une chaîne de Markov à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$ , de matrice de transition

$$Q(x, y) = (1 - p)^{y-1} p, \quad x, y \in \mathbf{N}^*.$$

On définit le temps d'arrêt  $\tau$  par

$$\tau = \mathcal{S}((X_k)_{k \geq 0}) := \inf\{k \geq 1 : X_k > X_0\},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ . La fonction  $\mathcal{T}$  permet de définir les temps des records successifs de la suite  $(X_n)$  par  $\tau_0 = 0$  et

$$\tau_{n+1} := \tau_n + \mathcal{T}((X_{\tau_n+k})_{k \geq 0}) = \inf\{k > \tau_n : X_k > X_{\tau_n}\}.$$

On note  $Z_n := X_{\tau_n}$ , les records successifs.

1. Soit  $x, y, k$  trois entiers non nuls avec  $x \leq y$ . Calculer

$$\mathbf{P}_x(X_1 \leq x, \dots, X_{k-1} \leq x, X_k > y).$$

2. Calculer  $\mathbf{P}_x(\tau = k, X_k > y)$ . Montrer que, sous  $\mathbf{P}_x$ ,  $\tau$  est une variable géométrique avec un paramètre que l'on déterminera et que  $X_\tau$  a la même loi que  $x + X_1$ . Le couple  $(\tau, X_\tau)$  est-il indépendant sous  $\mathbf{P}_x$  ?
3. Montrer que  $\pi(x) = (1-p)^{x-1}p$ ,  $x \in \mathbf{N}^*$ , est la seule mesure de probabilité invariante pour  $Q$ . Montrer que  $\mathbf{P}_\pi(\tau < \infty) = 1$  et  $\mathbf{E}_\pi(\tau) = \infty$ .
4. Montrer que  $(Z_n, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov dans  $\mathbf{N}^*$  sous  $\mathbf{P}_x$  par rapport à la filtration  $(\mathcal{G}_n) := (\mathcal{F}_{\tau_n})$ . Calculer sa matrice de transition et sa loi initiale.
5. Calculer pour toute fonction bornée  $f : \mathbf{N}^* \mapsto \mathbf{R}$  l'espérance conditionnelle de  $f(Z_{n+1} - Z_n)$  sachant  $\mathcal{G}_n$ . Montrer que la suite  $(Z_n - Z_{n-1}, n \geq 1)$  est i.i.d. sous  $\mathbf{P}_x$ .
6. Calculer la limite  $\mathbf{P}_x$ -presque sûre de  $Z_n/n$ , pour tout  $x \in \mathbf{N}^*$ .

## Récurrence, transience, irréductibilité

**Exercice 3.7.** On considère une chaîne de Markov  $(X_n, n \geq 0)$  dans  $E = \{1, 2, 3\}$  avec matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. Classer les états. Quelles sont les classes de récurrence/transience ? Déterminer les états  $x$  tels que  $G(x, x) = \infty$ , où  $G$  est la fonction de Green. Déterminer également si  $G(x, y) = 0$ .
2. Montrer que  $G$  satisfait la formule  $G = I + QG$ , où  $I$  est la matrice identité. En déduire la valeur de  $G$  et donc les valeurs de  $\mathbf{E}_x(N_y)$  pour tous  $x, y \in E$ , où  $N_y$  est le nombre de visite de  $X$  à  $y$ .
3. On s'intéresse à présent au temps de première visite en 1 (i.e.,  $T_{\{1\}} = \inf\{n \geq 0; X_n = 1\}$ ) en fonction du point de départ. On introduit alors  $v(x) = \mathbf{E}_x(T_{\{1\}})$ . Montrer que

$$v(x) = 1 + (Qv)(x), \quad x \in \{2, 3\}, \quad v(1) = 0.$$

En déduire la valeur de  $\mathbf{E}_x(T_{\{1\}})$  pour tout  $x \in E$ .

4. Que peut-on dire de  $\mathbf{E}_x(T_{\{3\}})$  où  $T_{\{3\}}$  est le temps de première visite de  $\{3\}$  ?
5. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique.

6. Soit  $T_{\{1,2\}}$  le premier temps de visite de  $X$  à l'ensemble  $\{1, 2\}$ . Quelle est la loi de  $T_{\{1,2\}}$  sous  $\mathbf{P}_3$  ?
7. Remarquer que  $\mathbf{E}_3(T_{\{1,2\}}) = \mathbf{E}_3(N_3)$ . Quelle en est la raison ?

**Exercice 3.8.** Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov à valeurs dans  $E$  dénombrable, de matrice de transition  $Q$ , et issue de  $x$  sous la mesure  $\mathbf{P}_x$ . Soient  $x, y, z \in E$ . Prouver que si  $y$  transient, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \left( \mathbf{1}_{\{T_y < \infty\}} \sum_{n \geq T_y} \mathbf{1}_{\{X_n = z\}} \right) &= \mathbf{P}_x(T_y < \infty) G(y, z) \\ &= \frac{G(x, y)}{G(y, y)} G(y, z) \end{aligned}$$

**Exercice 3.9.** Soit  $Q := (Q(x, y), x, y \in E)$  une matrice de transition sur un espace d'états dénombrable  $E$  et soit  $\pi$  une mesure de probabilité invariante telle que  $\pi(x) > 0$  pour tout  $x \in E$ . Soit  $Q^* := (Q^*(x, y), x, y \in E)$  définie par

$$Q^*(x, y) := \frac{Q(y, x)\pi(y)}{\pi(x)}, \quad x, y \in E.$$

1. Montrer que  $Q^*$  est une matrice de transition sur  $E$  et que  $\pi$  est une mesure de probabilité invariante pour  $Q^*$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $Q^* = Q$ .
2. Soit  $(X_n, n \geq 0)$  une chaîne de Markov avec matrice de transition  $Q$  et telle que  $X_0$  soit de loi  $\pi$ . Soit  $N \in \mathbf{N}$  fixé et  $X_n^* := X_{N-n}$ . Calculer  $\mathbf{P}(X_0^* = x_0, \dots, X_N^* = x_N)$  et en déduire que  $(X_n^*, n \in [0, N])$  est, sous  $\mathbf{P}$ , une chaîne de Markov avec loi initiale  $\pi$  et matrice de transition  $Q^*$ .
3. Soit maintenant  $p \in ]0, 1[$  et  $Q$  la matrice de transition sur  $\mathbf{N} = \{0, 1, \dots\}$  donnée par

$$Q(x, y) = p \mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + (1-p) \mathbf{1}_{\{y=0\}}, \quad x, y \in \mathbf{N}.$$

Calculer une mesure de probabilité invariante  $\pi$  et dire si elle est unique. Calculer  $Q^*$  et vérifier que dans ce cas

$$Q^*(x, y) = \mathbf{1}_{\{y=x-1\}} + \pi(y) \mathbf{1}_{\{x=0\}}, \quad x, y \in \mathbf{N}.$$

Dessiner les trajectoires typiques de  $X$  et  $X^*$  dans ce cas.

**Exercice 3.10.** On considère la chaîne de Markov d'espace d'états  $\mathbf{N}$  et de matrice de transition  $Q := (Q(i, j), i, j \in \mathbf{N})$  définie par

$$Q(i, 0) = q_i \text{ et } Q(i, i+1) = p_i \text{ pour tout } i \in \mathbf{N},$$

où, pour tout  $i$ ,  $p_i + q_i = 1$ ,  $p_i > 0$ ,  $q_i > 0$ .

1. Vérifier que la chaîne est irréductible.
2. À quelle condition sur les  $p_i$  existe-t-il une mesure invariante ? Dans ce cas prouver que la chaîne est récurrente.

3. Sous quelle condition sur les  $p_i$  la chaîne est-elle récurrente positive ?

**Exercice 3.11.** Soit  $(X_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\{0, 1\}$  avec  $\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$ . On s'intéresse aux blocs de 3 zéros consécutifs sans compter 2 fois 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent. Lorsqu'il y a 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent, on compte seulement le premier.

On note  $N_n$  le nombre de blocs comptés entre les instants 1 et  $n$ . On veut calculer la limite de la fréquence empirique de ces blocs, i.e., la limite p.s. de  $N_n/n$ .

Pour ce faire on utilise une chaîne de Markov  $Y = (Y_n, n \geq 0)$  à 4 états 0, 1, 2, 3, d'état initial 0 (0 état de repos) qui mémorise le nombre de zéros consécutifs et retombe à l'état de repos lorsqu'on a compté 3 zéros consécutifs. Par exemple : si

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, \dots) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots),$$

alors

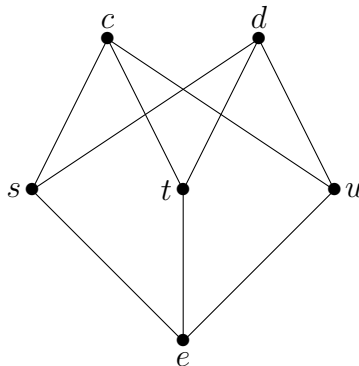
$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, \dots) = (1, 0, 1, 2, 3, 1, 0, \dots)$$

et  $N_7 = 1 = \sum_{k=1}^7 \mathbf{1}_{\{Y_k=3\}}$ . La matrice de transition  $Q := (p(x, y), x, y \in \{0, 1, 2, 3\})$  de la chaîne  $Y$  est donnée par

$$\begin{aligned} p(0,0) &= p(0,1) = \frac{1}{2}, & p(1,0) &= p(1,2) = \frac{1}{2} \\ p(2,0) &= p(2,3) = \frac{1}{2}, & p(3,0) &= p(3,1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1. Vérifier que la chaîne  $Y$  est irréductible récurrente positive. Calculer sa probabilité invariante.
2. En déduire la limite p.s. de  $N_n/n$ .

**Exercice 3.12.** [Examen 2017] On considère la marche au hasard sur le graphe suivant :



qu'on étudie comme une chaîne de Markov sur l'espace d'états  $\{e, s, t, u, c, d\}$ .

1. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?
2. Déterminer toutes les mesure de probabilités invariantes de cette chaîne de Markov.

3. Entre deux visites en  $t$ , combien de fois la chaîne de Markov passe-t-elle, en moyenne, en  $c$  ?
4. Partant de  $u$ , combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à revenir en  $u$  ?
5. Partant de  $e$ , quelle proportion du temps la chaîne passe-t-elle, asymptotiquement, dans le sous-ensemble  $\{c, d\}$  de  $E$  ?
6. Partant de  $e$ , combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à atteindre  $d$  ?

## Convergence vers la loi stationnaire

**Exercice 3.13.** On considère une chaîne de Markov  $(X_n)$  dans  $E = \{1, 2, 3\}$  avec matrice de transition  $Q := (Q(x, y), x, y \in E)$

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les classes de récurrence/transience ?
2. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique et si elle est réversible.
3. Calculer pour tout  $x \in E$  le temps moyen de retour à  $x$ ,  $\mathbf{E}_x(S_x)$ .
4. Calculer la période de tout  $x \in E$ . Quelle est la limite des probabilités de transition  $[Q^n](x, y)$ , quand  $n \rightarrow \infty$  ?

**Exercice 3.14.** [2eme session 2017] Un professeur possède un nombre entier  $N \geq 1$  de parapluies, répartis entre son bureau et son domicile. Il se rend à son bureau à pied le matin et rentre chez lui à pied le soir. S'il pleut, et s'il en a un à sa disposition, il prend un parapluie. S'il fait beau, il n'en prend pas. On suppose qu'à chaque trajet du professeur il pleut avec probabilité  $p \in ]0, 1[$ , indépendamment des trajets précédents.

1. Écrire la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur l'espace d'états  $\{0, \dots, N\}$  qui modélise convenablement ce problème, l'entier  $k$  correspondant à la situation où il y a  $k$  parapluies à l'endroit où se trouve le professeur.
2. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?
3. Déterminer toutes les mesures invariantes de cette chaîne.
4. Quelle est, asymptotiquement, la proportion des trajets durant lesquels le professeur marche sous la pluie sans parapluie ? Vérifier que pour  $p = \frac{1}{2}$ , cette proportion vaut  $\frac{1}{4N+2}$ .
5. Quelle est la période de la chaîne de Markov que nous sommes en train d'étudier ?

**Exercice 3.15.** (Produit de 2 chaînes indépendantes).

Soient  $X = (X_n)$  et  $Y = (Y_n)$  deux chaînes de Markov indépendantes d'espaces d'états  $E$  et  $F$ , de matrice de transition  $Q$  et  $R$  respectivement. La chaîne produit est par définition la chaîne  $Z = (Z_n)$  où  $Z_n = (X_n, Y_n)$ . On vérifie sans peine que la chaîne  $Z$  est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$S((x, y), (x', y')) = Q(x, x')R(y, y'), \quad x, x' \in E, y, y' \in F.$$



1. Exprimer les coefficients de  $S^n$  en fonction des coefficients de  $Q^n$  et  $R^n$ .
2. Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont irréductibles de période 1, alors la chaîne  $Z = (Z_n)$  est irréductible de période 1.
3. Donner un contre-exemple pour lequel  $X$  et  $Y$  sont irréductibles de période 2 et pour lequel  $Z$  n'est pas irréductible.
4. Supposons que  $Q$  et  $R$  admettent des probabilités invariantes respectives  $\rho$  et  $\sigma$ . Trouver une probabilité invariante  $\pi$  pour la chaîne produit.
5. On considère un damier à 16 cases (numérotées successivement de 1 à 16 de gauche à droite, de haut en bas ; les cases sont de couleur noire ou blanche alternée) sur lequel se déplacent indépendamment l'une de l'autre deux souris ; chaque souris passe d'une case à l'une des  $k$  cases voisines avec la probabilité  $1/k$  (les déplacements diagonaux sont proscrits).

Quel est l'intervalle de temps moyen séparant deux rencontres successives sur la case 7 ?

**Exercice 3.16.** [Problème de Dirichlet discret et formule de Feynman-Kac]

Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans un ensemble fini  $E$ , de matrice de transition  $P$ . On considère un sous-ensemble  $A$  de  $E$  (avec  $A \neq \emptyset$  et  $A \neq E$ ), et deux fonctions  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g : A^c \rightarrow \mathbf{E}$  définies respectivement sur  $A$  et son complémentaire.

On note  $T_A = \min\{n \geq 0, X_n \in A\}$  le premier temps d'atteinte de  $A$  pour la chaîne, et on considère la fonction  $u : E \rightarrow \mathbf{R}$  définie par :

$$u(x) = \mathbf{E}_x \left[ f(X_{T_A}) + \sum_{k=0}^{T_A-1} g(X_k) \right]$$

Montrer que la fonction  $u$  vérifie :

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) \text{ pour } x \in A, \\ (I - P)u(x) &= g(x) \text{ pour } x \in A^c. \end{aligned}$$

**Exercice 3.17.** [Examen 2018] Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov à valeurs dans  $E$  dénombrable. On suppose que la chaîne est irréductible et qu'il existe une mesure de probabilité  $\pi$  sur  $E$  qui soit invariante.

On fixe  $x \in E$  et on considère un temps d'arrêt  $S = \mathcal{S}((X_n)_{n \geq 0})$  tel que  $\mathbf{P}_x$ -presque sûrement, on a  $1 \leq S < +\infty$  et  $X_S = x$ . On suppose de plus que  $\mathbf{E}_x[S] < +\infty$ . Plus généralement, on définit la suite de temps d'arrêts successifs  $S_1 = S$  et  $S_{i+1} = S_i + \mathcal{S}((X_{S_i+n})_{n \geq 0})$ . On pose  $S_0 = 0$  par convention.

1. Soit  $y \in E$ . Que peut-on dire de la convergence presque sûre et dans  $\mathbf{L}^1$  de la suite

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}?$$

2. Montrer que, sous  $\mathbf{P}_x$ , les variables aléatoires

$$\sum_{k=S_i}^{S_{i+1}-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}} \quad i \geq 0,$$

sont indépendantes et de même loi.

3. À l'aide de la loi forte des grands nombres et de la question 1, montrer que, quel que soit  $y \in E$ ,

$$\mathbf{E}_x \left[ \sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}} \right] = \pi(y) \mathbf{E}_x[S].$$

4. Pour  $z \in E$ , on note  $T_z = \inf\{n \geq 1, X_n = z\}$ . Soit  $S$  le premier temps de passage par  $x$  après avoir visité  $y$ . Exprimer  $\mathbf{E}_x S$  en fonction de  $T_x$  et  $T_y$ .
5. En considérant le temps d'arrêt  $S$ , montrer que pour tous  $x \neq y \in E$  on a

$$\pi(y) \mathbf{P}_y(T_x < T_y) (\mathbf{E}_x(T_y) + \mathbf{E}_y(T_x)) = 1.$$

**Exercice 3.18.** Serge aime beaucoup le vin. Après avoir trop bu, il s'endort et fait le rêve suivant : au départ il a une somme d'argent  $x \in \mathbf{N}$  (en Euros) ; à chaque minute il boit un verre de vin, qui lui coûte un Euro ; chaque fois qu'il épuise son capital, il trouve un porte monnaie qui contient un nombre entier et aléatoire de pièces d'un Euro, et il recommence instantanément à acheter du vin et boire. Le rêve continue de la même façon indéfiniment.

On modélise le capital  $X_n$  à disposition de Serge à chaque minute  $n \in \mathbf{N}$  à l'aide d'une chaîne de Markov sur  $\mathbf{N} = \{0, 1, \dots\}$ , avec matrice de transition  $P := (p(x, y), x, y \in \mathbf{N})$  définie par

$$p(x, y) = \begin{cases} f(y+1) & \text{si } x = 0, y \geq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, y = x - 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $f$  est une probabilité sur  $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ ,  $f : \mathbf{N}^* \mapsto ]0, 1[$ ,  $\sum_n f(n) = 1$ , avec  $f(y) > 0$  pour tout  $y \in \mathbf{N}^*$ . Sous  $\mathbf{P}_x$ ,  $(X_n)$  est une chaîne de Markov sur  $\mathbf{N} = \{0, 1, \dots\}$  avec probabilité de transition  $P$  et état initial déterministe  $X_0 = x \in \mathbf{N}$ . Si au temps  $i$  le capital de Serge est  $y > 0$ , au temps  $i+1$  le capital sera  $y-1$ . Si au temps  $i$  le capital de Serge est nul, il trouve une quantité  $y \geq 1$  de pièces avec probabilité  $f(y)$ , et il en dépense instantanément une, ainsi que son capital au temps  $i+1$  sera  $y-1$  avec probabilité  $f(y)$ . Soient  $S_0 := 0$ ,  $S_{n+1} := \inf\{i > S_n : X_i = 0\}$ , les retours successifs à l'état 0.

1. Quelles sont les classes de communication de la chaîne de Markov  $(X_n)$  ?
2. Montrer que  $\mathbf{P}_0(S_1 = n) = f(n)$ ,  $n \geq 1$ . En déduire la classification des états en classes récurrentes/transitoires.
3. Montrer que la mesure sur  $\mathbf{N}$  définie par

$$\lambda(x) := \sum_{y=x+1}^{\infty} f(y), \quad x \in \mathbf{N},$$

est invariante pour  $P$  et que toute mesure invariante est un multiple de  $\lambda$ .

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(X_n)$  soit récurrente positive. Montrer qu'il existe une seule mesure de probabilité invariante si et seulement si

$$m := \sum_n n f(n) < \infty.$$

**On suppose la condition  $m < \infty$  satisfaite dans la suite.**

5. Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x(X_n = y)$ , pour tous  $x, y \in \mathbf{N}$ .
6. Définir  $u(n) := \mathbf{P}_0(X_n = 0)$ . Montrer que  $\{X_0 = X_n = 0\} = \cup_{z \leq n} \{X_0 = X_n = 0, S_1 = z\}$  et en déduire que

$$u(n) = \sum_{z=1}^n f(z) u(n-z) = [f * u](n), \quad n \geq 1.$$

7. Soit  $t_i := S_i - S_{i-1}$ ,  $i \geq 1$ . Montrer que  $(t_i, i \geq 1)$  est, sous  $\mathbf{P}_0$ , une suite i.i.d. et calculer  $\mathbf{P}_0(t_i = n)$  (pour  $n \geq 1$ ).
8. Montrer que  $\mathbf{P}_0(S_i = n) = f^{i*}(n)$ , où  $f^{i*} = f * \dots * f$  est la convolution  $i$  fois de  $f$  pour  $i \geq 1$ .
9. Montrer que  $\{X_n = 0\} = \cup_{i=0}^{\infty} \{S_i = n\}$  et en déduire que

$$u(n) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{i*}(n), \quad n \geq 1.$$

10. Montrer le *Théorème du renouvellement* : si  $u$  est définie par la formule précédente, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = \frac{1}{m}.$$



# Problème : Processus de branchement

Le but de ce problème est d'étudier un type de processus, appelé *processus de branchement*, qui est largement utilisé en biologie pour décrire l'évolution d'une population dont la reproduction des individus est aléatoire ou, de manière plus générale, tous les problèmes où des structures d'arbres aléatoires apparaissent.

La problématique est la suivante : on considère des générations discrètes dont on renouvelle tous les individus d'une génération à la suivante. Chaque individu a un nombre aléatoire d'enfants, indépendamment de tous les autres individus et ce nombre peut être éventuellement nul. On s'intéresse alors à la taille de la population ( $Z_n, n \geq 0$ ) au cours du temps, sachant que l'on commence avec un unique individu ( $Z_0 = 1$ ).

Pour décrire le nombre d'enfants de chaque individu (réel ou virtuel), on introduit une famille de variables aléatoires  $(X_{k,n})_{(k,n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*}$  à valeurs entières, indépendantes, et de même loi  $\xi$ . Chaque  $X_{k,n}$  représente le nombre d'enfants de l'individu  $k$  à la génération  $n$  (s'il existe). Nous introduisons alors la filtration associée  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_{k,i}; k \in \mathbf{N}^*, 1 \leq i \leq n)$  et  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . La loi  $\xi$  est appelée *la loi de branchement*.

La taille de la population suit ainsi l'évolution suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad Z_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_n = 0 \\ \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n+1} & \text{si } Z_n > 0 \end{cases}$$

**1. (un premier cas simple)** Nous supposons tout d'abord  $\xi(0) + \xi(1) = 1$ . Interpréter cette condition en termes de nombre d'enfants. Comment évolue  $Z_n$  lorsque  $n$  augmente ? Nous supposons ensuite  $\xi(0) = 0$  : la population peut-elle s'éteindre ?

**Nous supposons désormais que  $\xi(0) + \xi(1) < 1$  et  $\xi(0) > 0$ .**

Nous introduisons les notations

$$m = \sum_{k \in \mathbf{N}} k\xi(k), \quad \varphi(r) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \xi(k)r^k \quad \text{pour } r \in [0, 1]$$

qui sont la moyenne du nombre d'enfants d'un individu et la fonction génératrice de ce nombre. Nous définissons également les itérées de la fonction  $\varphi$  par  $\varphi_0(r) = r$  et  $\varphi_{n+1}(r) = \varphi(\varphi_n(r)) = \varphi_n(\varphi(r))$  pour  $n \in \mathbf{N}$ .

**2.** Calculer  $\mathbf{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)$  puis  $\mathbf{E}(Z_n)$  pour tout  $n$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $r \in [0, 1]$ ,

$$\mathbf{E}(r^{Z_{n+1}} | \mathcal{F}_n) = \varphi(r)^{Z_n}$$

En déduire  $\mathbf{E}(r^{Z_n})$ .

**3.** Nous étudions les points fixes de la fonction  $\varphi$  selon la valeur de  $m$ . Étudier la fonction  $r \mapsto \varphi(r)$  et en déduire le nombre de solutions de l'équation  $\varphi(r) = r$  sur  $[0, 1]$ .

Nous appellerons  $q$  la plus petite solution de l'équation  $\varphi(r) = r$  sur  $[0, 1]$ . Montrer que la suite  $(\varphi_n(0), n \geq 0)$  est une suite croissante qui converge vers  $q$ .

Nous voulons savoir si la population survit ou s'éteint aux temps longs et introduisons dans ce but la variable aléatoire :

$$T = \inf \{n \in \mathbf{N}; Z_n = 0\},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ .

**4.** Montrer que  $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ . Montrer, en utilisant les résultats précédents sur la fonction  $\varphi$ , que

$$\mathbf{P}(T < \infty) = q.$$

Nous appellerons *extinction* l'événement  $\{T < \infty\}$  et *survie* l'événement  $\{T = \infty\}$ . Le cas *critique* correspond à  $m = 1$ , le cas *surcritique* à  $m > 1$  et le cas *sous-critique* à  $m < 1$ . Faire le lien avec la probabilité de survie.

**5.** Nous supposons dans cette question  $m > 1$  et introduisons les variables  $M_n = q^{Z_n}$ . Montrer que  $(M_n, n \geq 0)$  est une martingale dont on étudiera la convergence. En déduire l'égalité presque sûre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{Z_n} \mathbf{1}_{\{T = \infty\}} = 0$$

puis en déduire l'égalité presque sûre

$$\mathbf{1}_{\{T = \infty\}} = \mathbf{1}_{\{\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \infty\}}.$$

Conclure sur le comportement de la population lorsqu'elle ne s'éteint pas.

**6.** Nous supposons toujours  $m > 1$  et supposons en plus que  $\sigma^2 = \sum_{k \in \mathbf{N}} k^2 \xi(k) - m^2 < \infty$ . En introduisant une martingale idoine, nous pouvons être en fait beaucoup plus précis sur le comportement de  $Z_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  ! Soit la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$  par  $W_n = Z_n / m^n$ .

1. Montrer que  $(W_n, n \geq 0)$  est une martingale.

2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\mathbf{E}(Z_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = m^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n$$

En déduire que  $\sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}(W_n^2) < \infty$ . Conclure sur la convergence de la martingale  $(W_n)$ , dont on notera la limite  $W_\infty$ .

3. Introduisons la fonction  $L : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,  $L(\lambda) = \mathbf{E}(e^{-\lambda W_\infty})$ . Écrire une identité fonctionnelle faisant intervenir  $\varphi$ ,  $L$  et  $m$ . Montrer que  $\mathbf{P}(W_\infty = 0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L(\lambda)$ . Conclure sur la valeur de  $\mathbf{P}(W_\infty = 0)$ .

4. En déduire l'égalité presque sûre  $\mathbf{1}_{\{T = \infty\}} = \mathbf{1}_{\{W_\infty > 0\}}$  et en déduire que, si la population survit, alors  $Z_n$  croît exponentiellement et donner un équivalent.

7. Nous supposons à présent  $m < 1$ . Quelle est la limite presque sûre de  $(W_n)$ ? Est-ce une martingale fermée?

## Le point de vue des chaînes de Markov

Nous nous focalisons à nouveau au cas sur le plus intéressant  $\xi(0) > 0$  et  $\xi(0) + \xi(1) < 1$ .

8. Montrer que  $(Z_n)$  est une chaîne de Markov dont on précisera la loi de transition en fonction des convolutions de la loi  $\xi$ .

9. Que peut-on dire de l'état 0? Quelles sont les classes d'états? Discuter le caractère transient ou récurrent de ces classes d'états.

10. En déduire que,  $\mathbf{P}$ -presque sûrement, on a ou bien extinction ou bien divergence de la taille  $Z_n$  vers  $\infty$ , i.e.,

$$\mathbf{P}(\exists n \in \mathbf{N}, \forall k \geq n, Z_k = 0) + \mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \infty) = 1.$$

## Quelques compléments pour réfléchir

Supposons à nouveau que  $\sum_k k^2 \xi(k) < \infty$ . Nous nous plaçons à présent dans le cas où  $m < 1$ . Nous considérons à présent une modification du problème de départ. Nous conservons les mêmes variables aléatoires  $X_{k,n}$  mais considérons une probabilité  $\mathbf{Q}$  telle que les  $X_{k,n}$  sont indépendantes, les  $X_{k,n}$  avec  $k > 1$  ont pour loi  $\xi(k)$  et la variable  $X_{1,n}$  a pour loi  $k\xi(k)/m$ . Nous supposons qu'une telle probabilité  $\mathbf{Q}$  existe et nous noterons  $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}$  l'espérance associée.

11.

1. Montrer que  $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(r^{Z_{n+1}} | \mathcal{F}_n) = r\varphi'(r)\varphi(r)^{Z_n-1}/m$ . Le processus  $(Z_n)$  s'éteint-il sous  $\mathbf{Q}$ ?
2. Montrer que  $\mathbf{E}(W_{n+1}r^{Z_{n+1}} | \mathcal{F}_n) = W_n r\varphi'(r)\varphi(r)^{Z_n-1}/m$ . Le processus  $(Z_n)$  s'éteint-il sous  $\mathbf{P}$ ?
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $f : \mathbf{N}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ , bornée mesurable, on a

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(f(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)) = \mathbf{E}(W_n f(Z_0, Z_1, \dots, Z_n))$$

En déduire la densité de  $\mathbf{Q}$  par rapport à  $\mathbf{P}$  lorsque ces mesures sont restreintes à la tribu  $\mathcal{G}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$ .

Vous pouvez à présent utiliser ce changement de probabilité et étudier  $\mathbf{Q}$  en détail pour en tirer des renseignements plus précis sur l'extinction de  $Z_n$  sous la probabilité  $\mathbf{P}$ .





# Indications pour les exercices



# Chapitre 0

## Indications du chapitre “Rappels”

### Espaces de probabilité et variables aléatoires

**Indications pour l'exercice 0.1.** On trouve une probabilité de  $\frac{p}{7-6p}$ .

**Indications pour l'exercice 0.2.** 1. Il suffit de remarquer que  $\omega \in \bigcap_{k=1}^n A_k$  si et seulement si  $\omega \in A_k$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ , c'est à dire si et seulement si  $\mathbf{1}_{A_k}(\omega) = 1$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ .

2. Cela s'obtient à partir de la relation précédente en passant au complémentaire.

3. On développe le produit en utilisant la relation :

$$\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{E \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{k \notin E} a_k \times \prod_{k \in E} b_k,$$

ou encore, en notant  $i_1 < \dots < i_q$  les éléments de  $E$  (de cardinal  $0 \leq q \leq n$ )

$$\prod_{k=1}^n (1 + b_k) = \sum_{E \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{k \in E} b_k = \sum_{q=0}^n \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_q} \prod_{i=1}^q b_{i_q}$$

Pour conclure, on passe à l'espérance.

4. On applique la formule précédente avec  $A_k$  l'évènement {l'étiquette  $k$  est attribuée au nom  $k$ }. On trouve pour  $p(n)$  la valeur  $p(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}/k!$ , qui tend vers  $1 - 1/e$ .

**Indications pour l'exercice 0.3.** On trouve  $\mathbf{P}(X = Y) = \frac{1}{n}$  et  $\mathbf{P}(X \geq Y) = \frac{n+1}{2n}$ . La loi de  $X - Y$  est donnée par  $\mathbf{P}(X - Y = k) = \frac{n-|k|}{n^2}$  pour  $-n < k < n$ .

**Indications pour l'exercice 0.4.** On remarque que l'hypothèse peut se récrire  $\mathbf{P}(T \geq n + p) = \mathbf{P}(T \geq n)\mathbf{P}(T \geq p)$ . En particulier, pour  $p = 1$  on voit que la suite  $\mathbf{P}(T \geq n)$  est géométrique de raison  $p = \mathbf{P}(T \geq 1)$ .

**Indications pour l'exercice 0.5.** 1. L'indépendance de  $\varepsilon X$  et  $\varepsilon X$  est équivalente à l'égalité

$$\mathbf{P}(\varepsilon X \leq t, \varepsilon = a) = \mathbf{P}(\varepsilon X \leq t)\mathbf{P}(\varepsilon = a)$$

pour tout  $t \in \mathbf{R}$  et tout  $a \in \{-1, 1\}$ .

- Il suffit de prendre  $Y = \varepsilon X$ ,  $\mathcal{A} = \sigma(X)$ ,  $\mathcal{B} = \sigma(\varepsilon)$ , pour  $\varepsilon$  et  $X$  tels que dans la question précédente, avec  $X$  symétrique et non presque sûrement nul.
- Il suffit de prendre  $Y = \varepsilon$ ,  $\mathcal{A} = \sigma(X)$ ,  $\mathcal{B} = \sigma(\varepsilon X)$ , pour  $\varepsilon$  et  $X$  tels que dans la question précédente, avec  $X$  symétrique et presque sûrement non nul.

**Indications pour l'exercice 0.6.** 1. La variable  $Z_1$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p_1$ . En particulier,  $Z_i$  et  $Z_j$  ont même loi si et seulement si  $p_i = p_j$ .

2. On a  $\text{Cov}(Z_1, Z_2) = -np_1p_2$ . En particulier,  $Z_1$  et  $Z_2$  ne sont pas indépendantes dès que  $p_1 \neq 0$  et  $p_2 \neq 0$ .

**Indications pour l'exercice 0.7.** 1. On trouve

$$\mathbf{E}(U^n) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a.$$

- Après un changement de variables  $(x, y) = (u/(u+v), u+v)$  dans une intégrale double, on trouve que les variables  $X = U/(U+V)$  et  $Y = U+V$  sont indépendantes, et que leur lois admettent respectivement les densités

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad (\text{loi bêta de paramètres } a \text{ et } b)$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(a+b)} e^{-y} y^{a+b-1} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) \quad (\text{loi gamma de paramètre } a).$$

**Indications pour l'exercice 0.8.** 1. On trouve pour la loi de  $(S_1, \dots, S_n)$  la densité

$$f_{S_1, \dots, S_n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \lambda^n \exp(-\lambda s_n) \mathbf{1}_{\{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n\}}.$$

- Il suffit d'intégrer la densité précédente par rapport aux  $n-1$  premières variables.
- La fonction caractéristique de  $S_n$  est

$$\varphi_{S_n}(t) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n.$$

- On peut raisonner en dérivant la fonction caractéristique, ou bien en utilisant la densité de  $S_n$ , ou encore en écrivant  $S_n$  comme somme de variables indépendantes. On trouve

$$\mathbf{E}(S_n) = \frac{n}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

## Convergences de suites de variables aléatoires

**Indications pour l'exercice 0.9.** 1. La suite  $(X_n)$  converge vers 1 presque sûrement et dans tous les  $\mathbf{L}^p$ , ( $p \geq 1$ ), et donc aussi en probabilité et en loi.

2. On a une convergence presque sûre (utiliser Borel-Cantelli) et dans tous les  $\mathbf{L}^p$  vers 0.

3. On a une convergence vers 0 presque sûrement (et donc en probabilité et en loi), mais pas dans  $\mathbf{L}^1$ , ni dans aucun  $\mathbf{L}^p$ ,  $p \geq 1$ .
4. On a convergence dans tous les  $\mathbf{L}^p$  ( $p \geq 1$ ) vers 0, et donc en probabilité et en loi. Pour ce qui est de la convergence presque sûre, on ne peut rien déduire. Si on rajoute que les  $(X_n)$  sont indépendantes, on n'a pas convergence presque sûre (Borel-Cantelli). Si en revanche, on fixe  $U$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$  et que l'on définit  $X_n = \mathbf{1}_{U \leq 1/n}$ , les  $X_n$  ont bien la loi de l'énoncé et convergent presque sûrement vers 0.
5. On a convergence presque sûre vers 0, et convergence dans  $\mathbf{L}^p$  si et seulement si  $p < 3/2$ .
6. (a) Si  $(X_n)$  converge presque sûrement, sa limite est une variable aléatoire à valeur dans  $\{0, 1\}$ . Par la loi du 0 – 1, elle est en fait déterministe. Par Borel-Cantelli, on trouve que  $X_n$  converge presque sûrement vers 0 si  $\sum_n p_n < \infty$ , converge presque sûrement vers 1 si  $\sum_n 1 - p_n < \infty$ , et ne converge pas dans les autres cas.  
 (b) Une suite qui converge dans  $\mathbf{L}^1$  admet une sous suite qui converge presque sûrement, par conséquent, la limite éventuelle dans  $\mathbf{L}^1$  de  $(X_n)$  est soit la constante 0 soit la constante 1. On voit que  $X_n$  converge vers 0 si  $p_n$  converge vers 0 et que  $X_n$  converge vers 1 si  $p_n$  converge vers 1. Dans les autres cas, la suite diverge.  
 (c) La convergence en loi a lieu si et seulement si  $(p_n)$  converge.

- Indications pour l'exercice 0.10.** 1. Par Borel-Cantelli, les  $\Omega_\varepsilon = \liminf\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}$  ont probabilité 1 (l'hypothèse d'indépendance n'est pas utile dans cette question). On remarque ensuite que  $X_n(\omega)$  converge vers  $X(\omega)$  pour tout  $\omega$  de l'évènement  $\tilde{\Omega} = \bigcap_{n \geq 1} \Omega_{1/n}$  qui est de probabilité 1.
2. La loi du 0 – 1 assure que  $X$  est presque sûrement constante. Par conséquent, les évènements  $\{|X_n - X| > \varepsilon\}$  sont indépendants, et il suffit d'appliquer le deuxième lemme de Borel-Cantelli.
  3. On conclut que, pour une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires réelles indépendantes,

$$X_n \rightarrow X \text{ p.s. si et seulement si, } \forall \varepsilon > 0, \sum_n \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

- Indications pour l'exercice 0.11.** On définit  $\varphi(1) = 1$  et  $\varphi(n+1) = \max(\varphi(n) + 1, K_n)$  où  $K_n$  est tel que pour tout  $k \geq K_n$ ,

$$\mathbf{P}(|X_k - X| > \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2}.$$

On conclut par Borel-Cantelli.

- Indications pour l'exercice 0.12.** 1. La suite converge en probabilité vers 0.  
 2. C'est le lemme de Borel-Cantelli

**Indications pour l'exercice 0.13.** La convergence en probabilité de  $X_n$  vers 0 est un simple calcul à partir de la définition. Pour  $Y_n$ , on montre que la probabilité  $\mathbf{P}(|Y_n - 0| > 1)$  ne tend pas vers 0 en utilisant l'inclusion

$$\bigcup_{i=1}^n \{X_i > n\} \subset \{Y_n > 1\}.$$

L'indépendance des  $X_i$  permet de montrer (passer au complémentaire) que  $\bigcup_{i=1}^n \{X_i > n\}$  a pour probabilité  $1/2$ .

**Indications pour l'exercice 0.14.** 1. C'est presque sûrement une série absolument convergente ( $|X_k/2^n| \leq 1/2^n$ ).

2. En voyant les  $X_k$  comme les chiffres binaires de  $Y_n$ , on voit que  $Y_n$  suit la loi uniforme sur  $\{k/2^n, 0 \leq k < 2^n\}$ . En passant par les fonction de répartition, on voit que la fonction de répartition limite est celle d'une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Indications pour l'exercice 0.15.** 1. Pour des variables centrées  $\text{Var}(S_n) = \|S_n\|_{\mathbf{L}^2}$ , et on utilise la complétude de  $\mathbf{L}^2$ .

2. La convergence  $\mathbf{L}^2$  implique la convergence  $\mathbf{L}^1$  qui implique la convergence des espérances. Pour la variance, l'indépendance implique que la variance de la somme est la somme des variances. Le passage à la limite est autorisé dans la variance grâce à la convergence  $\mathbf{L}^2$ .
3. On remarque que  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \text{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}(S - S_{k-1})$ . On utilise alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et le lemme de Borel-Cantelli.

**Indications pour l'exercice 0.16.** Pour les trois questions, passer par la caractérisation de la convergence en loi par la fonction de répartition.

**Indications pour l'exercice 0.17.** (Lemme de Slutsky)

1. Avec les fonctions caractéristiques, on écrit

$$\begin{aligned} \varphi_{(X_n, Y_n)}(t, s) - \varphi_{(X, e)}(t, s) &= \varphi_{(X_n, Y_n)}(t, s) - \varphi_X(t) e^{ics} \\ &= (\varphi_{(X_n, Y_n)}(t, s) - \varphi_{X_n}(t) e^{ics}) + e^{ics} (\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)), \end{aligned}$$

et on montre que les deux termes du membre de droite tendent vers 0.

2. On considère une variable  $W$  de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  (par exemple), et on pose  $X_n = (-1)^n W$ ,  $Y_n = W$ .

**Indications pour l'exercice 0.18.** On voit que

$$|X_n - X| = X_n + X - 2 \min(X, X_n).$$

On passe à l'espérance, et on remarque que  $\mathbf{E} \min(X, X_n)$  converge vers  $\mathbf{E}X$  par convergence dominée.

**Indications pour l'exercice 0.19.** 1. Par indépendance, on a  $\mathbf{E}[Y_n] = 1$ .

2. En se ramenant à une intégrale Gaussienne, on trouve  $\mathbf{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$ , puis par indépendance  $\mathbf{E}[\sqrt{Y_n}] = (\sqrt{\pi}/2)^n$ .
3. C'est l'inégalité de Markov appliquée à  $\sqrt{Y_n}$ .
4. On peut appliquer Borel-Cantelli, en remarquant  $\sqrt{\pi}/2 < 1$ .

**Indications pour l'exercice 0.20.** C'est l'inégalité de Jensen. L'inégalité obtenue peut se récrire avec les normes  $\|X\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|X\|_{\mathbf{L}^q}$ , ce qui s'interprète sur les espaces  $\mathbf{L}^p$  et  $\mathbf{L}^q$  comme indiqué.

## Autour de la marche aléatoire simple

- Indications pour l'exercice 0.21.**
1.  $\mathbf{P}(S_{2k+1} = 0) = 0$  et  $\mathbf{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k$ . On a en particulier l'équivalent  $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n$ .
  2. Si  $p \neq 1/2$ , d'après Borel-Cantelli,  $(S_n)$  passe presque sûrement qu'un nombre fini de fois en 0. Pour  $p = 1/2$ , on ne peut pas conclure.
  3. La loi des grands nombres donne l'équivalent presque sûr  $S_n \sim n(2p-1)$ . Qui permet de conclure dans le cas  $p \neq 1/2$ .

**Indications pour l'exercice 0.22.** 1. C'est Borel-Cantelli.

2. Le premier point découle de

$$\bigcap_{n \geq 1} \{-K/2 < S_n < K/2\} \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n^c$$

et le deuxième de

$$\{\limsup_n S_n = +\infty\} = \bigcup_{n \geq 1} \{S_n \geq K/2\} \text{ et } \{\limsup_n S_n = -\infty\} = \bigcup_{n \geq 1} \{S_n \leq -K/2\}.$$

3. On peut écrire  $\{\limsup_n S_n = +\infty\} = \{\limsup_n S_{n+k} - S_k = +\infty\}$ , or  $S_{n+k} - S_k$  est  $\sigma((X_{n+k})_{n \geq 1})$ -mesurable.

**Indications pour l'exercice 0.23.** 1. On écrit

$$\begin{aligned} \{S_n = k, M_n \geq y\} &= \bigcup_{q=1}^n \{S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n = k\} \\ &= \bigcup_{q=1}^n \{S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n - S_q = k - y\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \{S_n = 2y - k\} &= \bigcup_{q=1}^n \{S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n = 2y - k\} \\ &= \bigcup_{q=1}^n \{S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n - S_q = y - k\}, \end{aligned}$$

où les unions sont disjointes, puis on remarque que

$$\mathbf{P}(S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n - S_q = k - y)$$

et

$$\mathbf{P}(S_1 < y, \dots, S_{q-1} < y, S_q = y, S_n - S_q = y - k).$$

sont égaux.

2. On écrit

$$\mathbf{P}(M_n \geq y) = \sum_{k \leq y} \mathbf{P}(M_n \geq y, S_n = k) + \sum_{k > y} \mathbf{P}(S_n > k)$$

et on utilise la relation de la question précédente.

3. La majoration  $\mathbf{P}(S_n = y) \leq C/\sqrt{n}$  permet de déduire  $\mathbf{P}(S_n = y) \rightarrow 0$  et  $\mathbf{P}(0 \leq S_n < y) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On en déduit par symétrie que  $\mathbf{P}(S_n \geq 0)$  converge vers  $1/2$ , puis que  $2\mathbf{P}(S_n \geq y) - \mathbf{P}(S_n = y)$  converge vers  $2 \times 1/2 + 0 = 1$ . On a ensuite par monotonie  $\mathbf{P}(M_\infty \geq y) = \lim_n \mathbf{P}(M_n \geq y)$ .

4. On a bien  $\mathbf{P}(M_\infty = \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_\infty \geq y)$ .

**Indications pour l'exercice 0.24.** 1. La relation à montrer se déduit de l'égalité entre évènements

$$\begin{aligned} \{S_n = 0\} &= \bigcup_{k=1}^n \{S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n = 0\} \\ &= \bigcup_{k=1}^n \{S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n - S_k = 0\}, \end{aligned}$$

où l'union est disjointe.

2. Cela s'obtient à partir de l'équation précédente en multipliant par  $s^n$  et en sommant sur  $n$ . Les calculs sont justifiés car on manipule des séries entières dont le rayon de convergence est  $\geq 1$ .

3. On a l'expression  $u_{2n} = 4^{-n} \binom{2n}{n}$  (et  $u_{2n+1} = 0$ ), d'où on déduit  $U(s) = (1 - s^2)^{-1/2}$ . Par conséquent,  $F(s) = 1 - \sqrt{1 - s^2}$ . En développant en série, on trouve

$$\mathbf{P}(T_0 = 2n) = \frac{1}{4^n(2n-1)} \binom{2n}{n}.$$

Pour les entiers impairs, on a  $\mathbf{P}(T_0 = 2n + 1) = 0$ .

## Exercices supplémentaires

**Indications pour l'exercice 0.25.** 1. Le nombre de résultats possible est  $N(N - 1) \cdots (N - n + 1)$ .

2. On a  $\mathbf{P}(A_k) = M/N$  et  $\mathbf{P}(A_k \cap A_l) = M(M - 1)/(N(N - 1))$ .



3. On trouve

$$\text{Var}(S_n) = np(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right),$$

qui tend, dans le régime indiqué, vers  $np_0(1-p_0)$ .

**Indications pour l'exercice 0.26.** L'équivalence se déduit des inégalités, pour  $x \geq 0$ ,

$$\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \mathbf{1}_{x \geq \varepsilon} \leq \frac{x}{1+x} \leq \varepsilon + \mathbf{1}_{x \geq \varepsilon}.$$

**Indications pour l'exercice 0.27.** 1. On trouve

$$\mathbf{E}(Z_n^4) = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k^4) + \frac{1}{n^4} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbf{E}(X_i^2 X_j^2) = \frac{1}{n^3} \mathbf{E}(X_1^4) + \frac{n-1}{2n^3} \mathbf{E}(X_1^2)^2.$$

Par conséquent,  $\sum_{n \geq 1} \mathbf{E}(Z_n^4)$  converge, donc par Fubini  $\sum_{n \geq 1} Z_n^4$  est intégrable, donc presque sûrement finie, donc  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers 0.

2. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la suite  $(X_n - \mathbf{E}X_1)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Indications pour l'exercice 0.28.** 1. La variance de  $Z_n$  vaut  $\text{Var}(X_1)/n$ , de sorte que  $\sum \text{Var}(Z_{n^2})$  converge. Avec Bienaymé-Tchebychev puis Borel-Cantelli, on obtient la convergence presque sûre de  $(Z_{n^2})$  vers  $\mathbf{E}X_1$ .

2. On a  $n - q_n^2 \leq (q_n + 1)^2 - q_n^2 = 2q_n + 1 \leq 2\sqrt{n} + 1$ .

3. La variance de  $Z_n - \frac{q_n^2}{n} Z_{q_n^2}$  vaut  $\text{Var}(X_1)(n - q_n^2)/n^2 \leq \text{Var}(X_1)n^{-3/2}$ . Il s'agit encore du terme général d'une série convergente, et on peut raisonner comme en 1.

4. On écrit  $Z_n = \left(Z_n - \frac{q_n^2}{n} Z_{q_n^2}\right) + \frac{q_n^2}{n} Z_{q_n^2}$ . Le premier terme converge presque sûrement vers 0, le deuxième vers  $\mathbf{E}X_1$ .

**Indications pour l'exercice 0.29.** 1. On a  $\bar{T} = \sup_{k \in \mathbf{N}} S_k = \sup_{k \in \mathbf{N}} \bar{S}_{k+1}$ . Or  $S_k$  et  $\bar{S}_{k+1}$  ont même loi. Les variables  $T$  et  $\bar{T}$  ont donc la même loi.

2. On a les égalités entre évènements, pour tout  $q \geq 1$ ,

$$\{T = \infty\} = \left\{ \sup_k (S_{k+q} - S_q) = \infty \right\},$$

donc  $\{T = \infty\}$  est  $\sigma((X_{q+n})_{n \geq 1})$ -mesurable pour tout  $q$ , et est donc asymptotique.

3. On a  $T_n = \max(Y_1 + 0, Y_1 + \bar{S}_1, \dots, Y_1 + \bar{S}_n) = Y_1 + \max(0, \bar{T}_n)$ , d'où le résultat.

4. Si  $T = \infty$  p.s., alors  $\max(Y_1 - \bar{T}_n, Y_1)$  converge presque sûrement vers  $Y_1$ , en décroissant. Par convergence dominée,  $\mathbf{E}(T_n - \bar{T}_n)$  converge donc vers  $\mathbf{E}Y_1$ . Or, comme  $T_{n-1}$  et  $\bar{T}_n$  ont même loi, on a  $\mathbf{E}(T_n - \bar{T}_n) = \mathbf{E}(T_n - T_{n-1}) \geq 0$ , d'où le résultat.

5.  $Y_n$  admet une espérance négative, donc d'après la question précédente, la suite  $(X_1 + \dots + X_n - n\mathbf{E}X_1 - n\varepsilon)$  est presque sûrement majorée, d'où (pour tout  $\varepsilon > 0$ )

$$\limsup_n \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbf{E}X_1 \leq \varepsilon.$$

De même, en appliquant le résultat à  $Y'_n$ , on trouve  $\liminf_n \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbf{E}X_1 \geq -\varepsilon$ . Ces deux inégalités étant valables pour tous  $\varepsilon$ , on conclut.



# Chapitre 1

## Corrigé : Espérance conditionnelle

### 1.1 Généralités et calculs

**Indications pour l'exercice 1.1.** 1. De la définition même des probabilités conditionnelles résulte que

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \quad \mathbf{P}(A|B^c) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B^c)}{\mathbf{P}(B^c)}.$$

$$\mathbf{P}(A|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(A|B)\mathbf{1}_B + \mathbf{E}(A|B^c)\mathbf{1}_{B^c}$$

$$\mathbf{E}(X|B) = \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_B)}{\mathbf{P}(B)}, \quad \mathbf{E}(X|B^c) = \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{B^c})}{\mathbf{P}(B^c)}$$

$$\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(X|B)\mathbf{1}_B + \mathbf{E}(X|B^c)\mathbf{1}_{B^c}$$

2. On a

$$\mathbf{P}(A|\mathcal{G}) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{1}_{B_k}, \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{k \geq 1} \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{B_k})}{\mathbf{P}(B_k)}\mathbf{1}_{B_k}$$

3. On a

$$\mathbf{P}(A|Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}(A|Y = y_k)\mathbf{1}_{\{Y=y_k\}} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X|Y) = \sum_{k \geq 1} \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\{Y=y_k\}})}{\mathbf{P}(Y = y_k)}\mathbf{1}_{\{Y=y_k\}}$$

**Indications pour l'exercice 1.2.** 1. On a  $\mathbf{E}[S|N = n] = n\mu$ , puis  $\mathbf{E}[S|N] = N\mu$  et  $\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[N]\mu$

2. On trouve,  $\mathbf{E}[r^S|N = n] = \varphi_{X_1}(r)^n$ , puis  $\mathbf{E}[r^S|N] = \varphi_{X_1}(r)^N$  et

$$\mathbf{E}[r^S] = \mathbf{E}[\varphi_{X_1}(r)^N] = \varphi_N(\varphi_{X_1}(r)).$$

**Indications pour l'exercice 1.3.** 1. Sur l'évènement  $\{N = n\}$ ,  $T$  est donné par  $T = \min(T_1, \dots, T_n)$ , puis l'indépendance donne

$$\mathbf{P}(T > t|N = n) = (1 - t)^n.$$

2. On s'est en fait ramené au calcul de l'espérance d'une variable de fonction de répartition  $t \mapsto (1-t)^n$ , dont la moyenne est  $1/(n+1)$ . On a donc  $\mathbf{E}[T | N] = 1/(N+1)$ .
3. On a  $\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[T | N]] = (1 - e^{-\lambda})/\lambda$ .

**Indications pour l'exercice 1.4.** 1. Comme  $X_1 + X_2$  suit aussi une loi de Poisson, on trouve pour  $0 \leq k \leq n$ ,

$$\mathbf{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}.$$

2. Par le calcul, ou en reconnaissant une loi binomiale, on trouve

$$\mathbf{E}(X_1 | X_1 + X_2 = n) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} n$$

puis

$$\mathbf{E}(X_1 | X_1 + X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (X_1 + X_2).$$

3. Comme  $X_1 + X_2$  suit aussi une loi binomiale, on trouve pour  $0 \leq k \leq \min(n_1, n)$  et  $0 \leq n \leq n_1 + n_2$ ,

$$\mathbf{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}.$$

Pour l'espérance conditionnelle, on remarque que  $(X_1, X_1 + X_2)$  a même loi que le couple  $(\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i, \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \xi_i)$  où les  $(\xi_i)$  sont des variables de Bernoulli i.i.d. La linéarité de l'espérance conditionnelle donne alors :

$$\mathbf{E} \left( \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \middle| \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \xi_i \right) = n_1 \mathbf{E} \left( \xi_1 \middle| \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \xi_i \right) = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \left( \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \xi_i \right).$$

On en déduit

$$\mathbf{E}(X_1 | X_1 + X_2) = \frac{n_1}{n_1 + n_2} (X_1 + X_2).$$

**Indications pour l'exercice 1.5.** Ce sont essentiellement des propriétés de cours : pour  $X$   $\mathcal{G}$ -mesurable, on a  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = X$ , et  $\mathbf{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$ . Pour  $X$  indépendante de  $\mathcal{G}$ , on a  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbf{E}X$ , et enfin, on a toujours  $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}X$ .

**Indications pour l'exercice 1.6.** La quantité  $\mathbf{E}[X^2|\mathcal{G}] - \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]^2$  s'appelle la variance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{G}$ , et on est donc en train de considérer une variable de variance conditionnelle nulle.

En raisonnant comme pour montrer qu'une variable de variance nulle est presque sûrement constante, on montre que la variance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{G}$  est nulle si et seulement si  $X$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable (ou plutôt si et seulement si  $X$  est presque sûrement égale à une variable  $\mathcal{G}$ -mesurable).

**Indications pour l'exercice 1.7.** 1. La variable  $\int_{E_2} f(X_1, x_2) d\nu_2(x_2)$  étant bien mesurable pour la tribu  $\sigma(X_1)$ , il suffit de montrer que pour tout événement  $A = \{X_1 \in B\}$  de  $\sigma(X_1)$ , on a

$$\mathbf{E} \left[ \int_{E_2} f(X_1, x_2) d\nu_2(x_2) \mathbf{1}_A \right] = \mathbf{E}[f(X_1, X_2) \mathbf{1}_A],$$

ce qui est une simple réécriture en utilisant le théorème de Fubini.

2. C'est un cas particulier du calcul précédent avec  $E_1 = \mathbf{R}$ ,  $E_2 = \mathbf{N}$ ,  $X_1 = Z$ ,  $X_2 = N$  et  $f(z, n) = z^n$ .
3. C'est encore un cas particulier avec  $E_1 = E_2 = \mathbf{R}$  et  $f(x, u) = \mathbf{1}_{u \leq x}$ . Pour le second calcul, on remarque que l'on peut écrire  $e^{2\mathbf{1}_A} = e^2 \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A^c}$ , et on trouve  $\mathbf{E}(e^{2\mathbf{1}_{U \leq X}} | X) = (e^2 - 1)F(X) + 1$ .

**Indications pour l'exercice 1.8.** On trouve

$$\mathbf{E}[(Y - X)^+ | X] = \int_0^1 (y - X)^+ dy = \frac{1}{2}(1 - X)^2.$$

**Indications pour l'exercice 1.9.** 1. En faisant  $t \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\mathbf{P}(X = n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X = n, Y \leq t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^n,$$

ce qui correspond à une loi géométrique. De même, en sommant sur tous les  $n$ , on trouve

$$\mathbf{P}(Y \leq t) = \sum_n \mathbf{P}(X = n, Y \leq t) = \mu \int_0^t e^{-\mu y} dy,$$

ce qui est la fonction de répartition d'une variable de loi exponentielle.

2. On a

$$\mathbf{E}[Y | X = n] = \frac{n + 1}{\lambda + \mu},$$

donc

$$\mathbf{E}[Y | X] = \frac{X + 1}{\lambda + \mu}.$$

3. On utilise un conditionnement par rapport à  $X$  :

$$\mathbf{E} \left[ \frac{Y}{X + 1} \right] = \mathbf{E} \left[ \mathbf{E} \left[ \frac{Y}{X + 1} \middle| X \right] \right] = \mathbf{E} \left[ \frac{1}{X + 1} \mathbf{E}[Y | X] \right] = \mathbf{E} \left[ \frac{1}{\lambda + \mu} \right] = \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

4. On obtient  $\mathbf{P}(X = n | Y) = e^{-\lambda Y} \frac{(\lambda Y)^n}{n!}$ , soit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda Y$ . En particulier,  $\mathbf{E}[X | Y] = \lambda Y$ .

**Indications pour l'exercice 1.10.** 1. Par calcul, on obtient :

$$\mathbf{E}[\max(X_1, X_2) | X_1] = X_1 + e^{-\lambda X_1} / \lambda.$$

En passant à l'espérance, on obtient  $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2)] = \frac{3}{2\lambda}$ .

2. On obtient  $\mathbf{E}[\max(X_1, X_2) | X_1 + X_2] = \frac{3}{4}(X_1 + X_2)$ .

3. On trouve :

$$\mathbf{E}[X_1 | \min(X_1, X_2)] = \min(X_1, X_2) + \frac{1}{2\lambda}.$$

**Indications pour l'exercice 1.11.** L'intégrabilité vient de  $0 \leq C \leq 2(B+1)^\alpha \leq 2 \times 2^\alpha \max(B^\alpha, 1) \leq 2^{\alpha+1}(B^\alpha + 1)$ . Pour le calcul de l'espérance conditionnelle, on trouve :

$$\begin{aligned} E(2U(B+U^2)^\alpha) &= \int_0^1 2u(B+u^2)^\alpha du \\ &= \frac{(B+1)^{\alpha+1} - B^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

**Indications pour l'exercice 1.12.** 1. On remarque que  $\mathbf{E}[X | |X|]$  et  $\mathbf{E}[-X | |X|]$  sont égales, donc  $\mathbf{E}[X | |X|] = 0 = \mathbf{E}[X]$ .

2. Si  $X$  et  $|X|$  sont indépendantes, alors  $|X|$  est indépendante d'elle-même, donc constante. Dans ce cas, on a  $\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = -a) = 1/2$ .

**Indications pour l'exercice 1.13.** 1. Il suffit de traiter le cas  $X = 0$ . Si  $\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}] \geq 0$ , alors  $\mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A] = \mathbf{E}(\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]\mathbf{1}_A) \geq 0$ . Pour la réciproque, il suffit de choisir  $A = \{\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}] < 0\}$ .

2. C'est une conséquence immédiate de la question 1.

3. On applique le point 1 aux variables  $Z$  et  $-Z$ .

**Indications pour l'exercice 1.14.** Il suffit d'appliquer la propriété  $\mathbf{E}[\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = \mathbf{E}(X|\mathcal{H})$  (pour toutes sous-tribus  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ) à  $\mathcal{G} := \sigma(Z, \tilde{Z})$  et  $\mathcal{H} := \sigma(Z)$ .

## Variables gaussiennes

**Indications pour l'exercice 1.15.** 1. La matrice de covariance de  $(U, V, W)$  est

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on a  $U \sim \mathcal{N}(0, 6)$ ,  $V \sim \mathcal{N}(0, 3)$ ,  $W \sim \mathcal{N}(0, 26)$ , et les vecteurs  $(U, V)$  et  $(V, W)$  ont leurs coordonnées indépendantes, contrairement au vecteur  $(U, W)$ .

2. La covariance de  $W - aU$  et  $U$  vaut  $9 - 6a$ . Donc en posant  $Z = W - \frac{3}{2}U$ , les variables  $U$  et  $Z$  sont indépendantes. On trouve alors

$$\mathbf{E}(W|U) = \frac{3}{2}U, \mathbf{E}(W^2|U) = \frac{9}{4}U^2 + \frac{25}{2}, \mathbf{E}(W^3|U) = \frac{27}{8}U^3 + \frac{225}{4}U.$$

**Indications pour l'exercice 1.16.** 1. Le vecteur Gaussien  $(Z, W)$  a pour matrice de covariance  $2I$  (où  $I$  est la matrice identité). Par conséquent,  $Z$  et  $W$  sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(0, 2)$ .

2. On a  $\mathbf{E}(X | Z) = (X + Y)/2$ .

3. On a

$$\mathbf{E}(XY | Z) = \frac{Z^2}{4} - \frac{1}{2}, \text{ et } \mathbf{E}(XYZ | Z) = \frac{Z^3}{4} - \frac{Z}{2}.$$

**Indications pour l'exercice 1.17.** En calculant la covariance de  $W$  et  $Z$ , on trouve que seul  $a = 1/5$  assure l'indépendance. On a alors

$$\mathbf{E}[X|Z] = \frac{Z}{5}, \quad \mathbf{E}[X^2|Z] = \frac{Z^2}{25} + \frac{4}{5}.$$

**Indications pour l'exercice 1.18.** 1. L'espérance  $\mathbf{E}[X|Y]$  vaut  $\rho Y$ .

2. Le couple  $(U, V)$  est Gaussien centré de covariance :

$$\begin{pmatrix} 1 - \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 - \rho^2 \end{pmatrix},$$

autrement dit  $U$  et  $V$  sont indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1 - \rho^2)$ .

3. On trouve :

$$\mathbf{E}[U^2V^2] = 1 - \rho^2, \quad \mathbf{E}[UV^3] = 0, \quad \mathbf{E}[V^4] = 3(1 - \rho^2), \quad \mathbf{E}[X^2Y^2] = 1 + 2\rho^2.$$

**Indications pour l'exercice 1.19.** 1. Les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  suivent la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Elles sont indépendantes si et seulement si  $\rho = 1$ .

2. La densité du couple  $(R, \Phi)$  est donnée par

$$f(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(-\frac{r^2(1 - \rho \sin(2\varphi))}{2(1 - \rho^2)}\right) \mathbf{1}_{r>0} \mathbf{1}_{0<\varphi<2\pi}.$$

La densité de  $\Phi$  est donnée par

$$f_{\Phi}(\varphi) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{2\pi} \frac{\mathbf{1}_{]0, 2\pi]}(\varphi)}{(1 - \rho \sin 2\varphi)}.$$

3. Pour  $\rho = 0$ ,  $R$  admet pour densité  $re^{-r^2/2} \mathbf{1}_{r>0}$ ,  $\Phi$  est de loi uniforme sur  $[0, 2\pi]$ , et les variables  $R$  et  $\Phi$  sont indépendantes.