Tribus et partitions

Probabilités approfondies

7 septembre 2024

Dans ce texte, je vous propose de réfléchir à la question de savoir si toute tribu est engendrée par une partition, et à quelques questions liées. Ce texte ne contient pas de démonstrations : libre à vous de le compléter.

1 Tribu engendrée par une partition

Soit E un ensemble. On appelle *partition* de E une classe de parties de E qui sont non vides, deux à deux disjointes, et dont l'union est E tout entier.

Soit $\mathscr{C} = \{C_i : i \in I\}$ une partition de E. On considère la classe de parties

$$\mathscr{T} = \left\{ \bigcup_{j \in J} C_j : J \subseteq I, J \text{ dénombrable ou } I \setminus J \text{ dénombrable} \right\}.$$

Les trois assertions suivantes :

1. On a l'inclusion $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{T}$.
2. Pour toute tribu $\mathscr{E}$ sur E telle que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{E}$, on a l'inclusion $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{E}$.
3. La classe $\mathscr{T}$ est une tribu sur E.

sont vraies et entraînent que $\mathscr{T}$ est la tribu engendrée par $\mathscr{C}$.

2 Une question

Nous voulons réfléchir à la question suivante.

Soit $\mathscr{E}$ une tribu sur E. Existe-t-il une partition $\mathscr{C}$ de E telle que $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{C})$? Sinon, quelles hypothèses sur $\mathscr{E}$ suffiraient à garantir l'existence d'une telle partition $\mathscr{C}$?

Pour répondre à cette question, il faut essayer, partant d'une tribu $\mathscr{E}$ sur la quelle nous ne faisons a priori aucune hypothèse, de construire une partition $\mathscr{C}$ de E, avec l'espoir que la tribu $\mathscr{E}$ soit, au moins dans certains cas, engendrée par cette partition $\mathscr{C}$.

Nous allons faire une première tentative, basée sur la notion d'élément minimal, ou atome, d'une tribu.

3 Atomes

Soit $\mathscr{E}$ une tribu sur E. On appelle *élément minimal*, ou *atome*, de $\mathscr{E}$ un élément de $\mathscr{E}$ qui n'est pas vide et ne contient (au sens de l'inclusion) aucun élément de $\mathscr{E}$ autre que l'ensemble vide et lui-même. En symboles, $A \in \mathscr{E}$ est un atome si A est non vide et si

$$\forall B \in \mathscr{E},\ B \subseteq A \Rightarrow (B = \varnothing \text{ ou } B = A).$$

Pour toute tribu $\mathscr{E}$ sur E, notons $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ la classe des atomes de $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{A}(\mathscr{E}) = \{A \in \mathscr{E} : A \text{ est un atome de } \mathscr{E}\}.$$

Proposition 1 *Les éléments de $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ sont deux à deux disjoints.*

C'est un premier fait encourageant. Un autre est le suivant.

Proposition 2 *Soit $\mathscr{C}$ une partition de E. Les élément minimaux de la tribu $\sigma(\mathscr{C})$ sont exactement les éléments de $\mathscr{C}$. En symboles,*

$$\mathscr{A}(\sigma(\mathscr{C})) = \mathscr{C}.$$

Nous pouvons apporter une réponse partielle à notre question.

Proposition 3 *Si une tribu $\mathscr{E}$ sur E est engendrée par une partition, alors cette partition est celles des atomes de $\mathscr{E}$. Dans ce cas,*

$$\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{A}(\mathscr{E})).$$

En lisant un peu vite la dernière proposition, on pourrait se dire : "C'est gagné, toute tribu sur E est engendrée par la partition de E par ses atomes".

Si c'est ce que vous pensez, prenez un moment, avant de lire la suite, pour essayer de voir pourquoi cette conclusion était un peu trop rapide, et ce qui pourrait poser problème.

Il y a au moins deux problèmes que nous n'avons pas résolus.

1. Tout d'abord, nous avons vu que les atomes d'une tribu sont deux à deux disjoints, mais nous n'avons pas démontré que leur réunion est E tout entier. Tant que nous ne l'avons pas démontré, nous ne pouvons pas exclure que la réunion des atomes soit une partie de E strictement incluse dans E, auquel cas les atomes ne forment pas une partition de E, mais d'un sous-ensemble strict de E.

2. Ensuite, même en supposant que la classe $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ des atomes de $\mathscr{E}$ est bien une partition de E, nous n'avons pas démontré que la tribu $\mathscr{E}$ est engendrée par cette partition. Nous avons certainement l'inclusion $\mathscr{E} \supseteq \sigma(\mathscr{A}(\mathscr{E}))$, mais nous n'avons pas montré l'égalité.

Pour chacun de ces deux problèmes, nous pouvons soit essayer de démontrer qu'il ne se produit jamais, soit, pour en avoir le cœur net, chercher un exemple où il se produit.

Il se trouve que ces deux problèmes *peuvent* se produire.

1. Il est possible de trouver un ensemble E et une tribu $\mathscr{E}$ sur E telle que la classe $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ est une partition d'un sous-ensemble strict de E. En fait, il est même possible de trouver des exemples où la classe $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ est vide ! Il existe des tribus qui n'ont *aucun* atome.

2. Il est possible de trouver un ensemble E et une tribu $\mathscr{E}$ sur E telle que la classe $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ soit bien une partition de E, mais où pourtant l'inclusion $\mathscr{E} \supsetneq \sigma(\mathscr{A}(\mathscr{E}))$ est stricte.

Un exemple de cette dernière situation est plus facile à construire que pour la première.

Exemple 1 *Considérons $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{E} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. Déterminer $\mathscr{A}(\mathscr{E})$, vérifier que c'est une partition de $\mathbb{R}$, et que la tribu $\sigma(\mathscr{A}(\mathscr{E}))$ est strictement incluse dans $\mathscr{E}$.*

De cet exemple, nous déduisons que *la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas engendrée par une partition.* Dans toute sa généralité, la réponse à notre question initiale est donc négative.

L'exemple qui suit est plus difficile à traiter et peut être laissé de côté en première lecture.

Exemple 2 *Soit X un ensemble infini non dénombrable. Posons $E = \{0,1\}^X$, le produit cartésien d'un nombre infini non dénombrable de copies de $\{0,1\}$ indexées par X. Pour chaque élément $x \in X$, notons $p_x : E \to \{0,1\}$ la projection sur le facteur indexé par x. Munissons l'ensemble $\{0,1\}$ de la tribu $\mathscr{P}(\{0,1\})$, et munissons E de la tribu*

$$\mathscr{E} = \sigma(p_x : x \in X),$$

la plus petite tribu qui rende chacune des applications p_x mesurable. Une autre notation pour $\mathscr{E}$, qui est la tribu produit sur E, est $\mathscr{P}(\{0,1\})^{\otimes X}$.

Nous allons montrer que la tribu $\mathscr{E}$ n'a aucun atome. Pour cela, nous allons montrer d'abord qu'un élément de $\mathscr{E}$ qui contient au moins deux points de E n'est pas minimal pour l'inclusion, donc pas un atome. Seuls les singletons de E pourraient donc être des atomes de $\mathscr{E}$, mais nous allons montrer par ailleurs que $\mathscr{E}$ ne contient aucun singleton. La conclusion est qu'aucun élément non vide de $\mathscr{E}$ n'est minimal pour l'inclusion.

Commençons par le premier point. Soit $A \in \mathscr{E}$ qui contient deux éléments distincts a et b de E. Écrivons $a = (a_x)_{x\in X}$ et $b = (b_x)_{x\in X}$, où a_x et b_x sont, pour tout $x \in X$, des éléments de $\{0,1\}$. Puisque $a \neq b$, il existe $z \in X$ tel que $a_z \neq b_z$. Quitte à échanger a et b, supposons que $a_z = 0$ et $b_z = 1$. L'ensemble $Z = p_z^{-1}(\{0\})$ des éléments de E dont la composante z vaut 0 contient donc a mais pas b. De plus, Z appartient à $\mathscr{E}$. On a donc les inclusions strictes

$$\varnothing \subsetneq A \cap Z \subsetneq A$$

qui montrent que la partie $A \cap Z$ de $\mathscr{E}$ est non vide et strictement incluse dans A, si bien que A n'est pas un atome de $\mathscr{E}$.

Nous avons montré qu'une partie de E qui contient au moins deux éléments n'est pas un atome. Puisqu'un atome est non vide par définition, ce ne peut être qu'un singleton. Nous allons maintenant montrer que $\mathscr{E}$ ne contient aucun singleton. C'est le point un peu plus délicat.

Pour toute partie Y de X, définissons sur E la sous-tribu

$$\mathscr{E}_Y = \sigma(p_x : x \in Y)$$

de $\mathscr{E}$. On a par définition $\mathscr{E}_X = \mathscr{E}$.

La clé de notre argument est l'égalité

$$\mathscr{E} = \bigcup_{\substack{Y \subset X \\ Y \text{ dénombrable}}} \mathscr{E}_Y.$$

La chose remarquable ici est que l'union de sous-tribus dans le membre de droite est encore *une tribu. Contrairement à ce qui se passe en général, où une union de tribus n'est pas tribu, il n'y a pas ici besoin de considérer la tribu engendrée par cette union.*

Soit maintenant a un élément de E. Supposons que le singleton $\{a\}$ appartienne à $\mathscr{E}$. En vertu de l'égalité ci-dessus, il existe une partie dénombrable Y de X telle que $\{a\}$ appartienne à la tribu $\mathscr{E}_Y$.

Nous voulons montrer que c'est impossible, que la tribu $\mathscr{E}_Y$ ne contient aucun singleton. Il n'est pas possible de décrire très explicitement la tribu $\mathscr{E}_Y$, mais nous allons contourner ce problème, de la façon suivante. Notons $p_Y : E \to \{0,1\}^Y$ la projection qui oublie toutes les composantes correspondant à des éléments de $X \setminus Y$. Posons

$$\mathscr{F}_Y = \{p_Y^{-1}(B) : B \subseteq \{0,1\}^Y\}.$$

Alors nous avons l'inclusion $\mathscr{E}_Y \subseteq \mathscr{F}_Y$. En effet, $\mathscr{F}_Y$ est une tribu sur E, qui rend mesurable l'application p_y pour tout $y \in Y$.

Nous affirmons maintenant que la tribu $\mathscr{F}_Y$ elle-même ne contient pas le singleton $\{a\}$ (ni aucun singleton). En effet, supposons que $\{a\}$ appartienne à $\mathscr{F}_Y$. Il existerait alors une partie $B \subseteq \{0,1\}^Y$ telle que $\{a\} = p_Y^{-1}(B)$.

Or, puisque X est infini non dénombrable et Y est dénombrable, il existe un point $x \in X$ qui n'est pas dans Y. Soit $b \in E$ l'élément obtenu en modifiant la composante a_x de a (de 0 à 1 ou de 1 à 0), et en laissant toutes les autres inchangées. Alors b est distinct de a, mais pour tout $y \in Y$, on a $b_y = a_y$. Ceci signifie exactement que $p_Y(b) = p_Y(a)$. Or a appartient à $p_Y^{-1}(B)$, ce qui signifie que $p_Y(a)$ appartient à B. Donc $p_Y(b)$, qui est égal à $p_Y(a)$, appartient aussi à B. Ceci signifie, finalement, que b appartient à $p_Y^{-1}(B)$. Ainsi, $b \in \{a\}$, ce qui est contradictoire.

Ceci achève la démonstration du fait que la tribu $\mathscr{E}$ n'a aucun atome.

4 Une relation d'équivalence

Nous allons faire un deuxième essai pour associer à toute tribu sur un ensemble une partition de cet ensemble.

Soit E un ensemble et $\mathscr{E}$ une tribu sur E. Nous allons définir une relation sur E. Pour tous $x, y \in E$, écrivons $x \sim y$ si tout élément de $\mathscr{E}$ qui contient x contient également y. En symboles,

$$(x \sim y) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathscr{E},\ x \in A \Rightarrow y \in A).$$

Proposition 4 *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.*

L'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\sim$ est une partition de $\mathscr{E}$, que nous notons $\mathscr{K}(\mathscr{E})$. Un atome de $\mathscr{E}$ est toujours une classe d'équivalence de la relation $\sim$. Autrement dit, on a toujours l'inclusion

$$\mathscr{A}(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{K}(\mathscr{E}).$$

En particulier, si $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ est une partition de E, alors on a égalité : c'est par exemple le cas lorsque la tribu $\mathscr{E}$ est engendrée par une partition de E, ou lorsque $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{E} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Dans le cas traité dans le long exemple à la fin de la section précédente, de la tribu produit sur $\{0,1\}^X$ où X est infini non dénombrable, la relation $\sim$ est la relation d'égalité, et ses classes d'équivalence les singletons. Le problème dans ce cas est que ces classes n'appartiennent pas à la tribu $\mathscr{E}$. L'avantage du point de vue de la relation $\sim$ est la suivant.

Proposition 5 *Pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x pour la relation $\sim$ est l'intersection de tous les éléments de $\mathscr{E}$ qui contiennent x. Autrement dit, l'unique élément de $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ qui contient x est la partie*

$$K(x) = \bigcap_{\substack{A \in \mathscr{E} \\ x \in A}} A.$$

Le fait que la partie $K(x)$ n'appartienne pas nécessairement à $\mathscr{E}$ est dû au fait que l'intersection ci-dessus n'est pas nécessairement l'intersection d'une famille dénombrable d'éléments de $\mathscr{E}$.

Ceci nous met sur la piste d'une hypothèse qui garantit que les éléments de $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ appartiennent à $\mathscr{E}$. Avant de l'explorer, tirons une conclusion importante du fait que dès qu'un élément A de $\mathscr{E}$ contient un élément x de E, la classe d'équivalence de x est incluse dans A.

Proposition 6 *Tout élément de $\mathscr{E}$ est une réunion d'éléments de $\mathscr{K}(\mathscr{E})$.*

Dans le langage des relations d'équivalence, on peut dire que tout élément de $\mathscr{E}$ est *saturé* pour la relation $\sim$.

5 Le cas des tribus dénombrables

Soit $\mathscr{E}$ une tribu dénombrable sur l'ensemble E. Alors toute intersection d'éléments de $\mathscr{E}$ est une intersection dénombrable. En particulier, en vertu de la proposition 5, la tribu $\mathscr{E}$ contient les classes d'équivalence de la relation $\sim$, c'est-à-dire la partition $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ de E. On a donc

$$\sigma(\mathscr{K}(\mathscr{E})) \subseteq \mathscr{E}.$$

Mais la proposition 6 nous assure que tout élément de $\mathscr{E}$ est une réunion d'éléments de $\mathscr{K}(\mathscr{E})$. Or, puisque la partition $\mathscr{K}(\mathscr{E})$, qui est incluse dans $\mathscr{E}$, est dénombrable, la tribu engendrée par $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ est exactement l'ensemble des unions d'éléments de $\mathscr{K}(\mathscr{E})$. Ainsi,

$$\mathscr{E} \subseteq \sigma(\mathscr{K}(\mathscr{E})).$$

Nous avons donc l'égalité

$$\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K}(\mathscr{E})),$$

et nous avons finalement montré le résultat suivant.

Théorème 5.1 *Toute tribu dénombrable sur un ensemble est engendrée par une partition de cet ensemble.*

Il nous reste un petit pas à faire. Considérons une tribu dénombrable $\mathscr{E}$ sur un ensemble E. Elle est, d'après notre théorème, engendrée par la partition $\mathscr{K}(\mathscr{E})$. Cette partition est incluse dans $\mathscr{E}$, elle est donc finie ou infinie dénombrable. Si elle était infinie dénombrable, la tribu $\mathscr{E}$ serait en bijection avec l'ensemble des parties de $\mathscr{K}(\mathscr{E})$, et serait infinie non dénombrable.

Il s'ensuit que la partition $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ ne peut qu'être finie, et la tribu $\mathscr{E}$ elle-même est donc finie. Nous avons donc montré le résultat suivant.

Théorème 5.2 *Toute tribu dénombrable sur un ensemble est finie.*

Le cardinal d'une tribu est donc soit de la forme 2^n pour un certain n entier naturel, soit infini non dénombrable.