Arbitrage

Exercice 1 : Payoffs et stratégies

Donner et tracer les payoffs à maturité des stratégies suivantes. Interprétez l'utilisation de chaque stratégie :

1. **Straddle:** Achat d'un Call et d'un Put de même Strike K et de même échéance T.
2. **???:** Vente d'une action et achat de deux Calls de prix d'exercice K. Quel nom lui donneriez vous?
3. **Strangle:** Achat d'un Call et d'un Put de même échéance et de strike différent.
4. **Strip:** Achat d'un Call et de deux Puts de même échéance et de même strike K.
5. **Strap:** Achat de deux Calls et d'un Put de même échéance et de même strike K.
6. **Bull Spread:** Achat d'un Call de strike K_1 et vente d'un Call de strike $K_2 > K_1$ de même échéance.
7. **Bear Spread:** Achat d'un Put de strike K_1 et vente d'un Put de strike $K_2 > K_1$ de même échéance.
8. **Butterfly:** Achat de deux Calls de strikes $K + \delta K$ et $K - \delta K$ et vente de deux Calls de strike K.
9. **Condor:** Achat de deux Calls de strikes K_1 et $K_4 > K_1$, vente de deux Calls de strikes $K_2 = K_1 + \delta K$ et $K_3 = K_4 - \delta K$ avec $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$.

Exercice 2 : Prix de call et de put

On suppose qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché (AOA). On note B_0 le prix en 0 de l'actif sans risque rapportant 1 à la date T. On note de même C_0 et P_0 les prix en 0 d'un call et d'un put sur le sous jacent S de maturité T et de strike K.

1. Montrer par un raisonnement d'arbitrage que:

$$(S_0 - K\,B_0)^+ \leq C_0 \leq S_0$$

2. En déduire:

$$(K\,B_0 - S_0)^+ \leq P_0 \leq K\,B_0$$

3. Montrer que le prix du call est décroissant par rapport au strike mais croissant par rapport à la maturité.

4. Qu'en est-t-il du prix du put ?

Exercice 3 : Option Américaine

1. Montrer qu'une option Américaine est plus chère qu'une option Européenne.

2. Soit $t \in [0, T[$ et S_t le prix de l'actif S à cet instant. On suppose que $P(S_T < K) > 0$ et $P(S_T > K) > 0$. Soit B_t le prix de l'actif sans risque rapportant 1 à la date de maturité. Soit C_t^e le prix d'un call Européen acheté en t de prix d'exercice K et de maturité T. Montrer que $C_t^e > max(0, S_t - KB_t)$.

3. Montrer qu'à tout instant, il vaut mieux vendre un call américain à son prix de marché que de l'exercer.

4. En déduire qu'un call Américain a la même valeur qu'un call Européen.

Exercice 4 : Contrat forward sur devise

On étudie sur l'intervalle de temps $[0, T]$ le marché de devises entre l'euro et le dollar américain. Ce marché peut être schématisé de la manière suivante:

1. Dans l'économie européenne, il existe un actif sans risque domestique de taux d'intérêt continu r_d. Son prix est normalisé en T et vaut donc $B_t^d = e^{-r_d(T-t)}$€ pour tout $t \in [0, T]$.

2. Dans l'économie américaine, il existe aussi un actif sans risque, de taux d'intérêt continu r_f. Son prix, exprimé en dollars, est normalisé en T et vaut donc $B_t^f = e^{-r_f(T-t)}$ \$ pour tout $t \in [0, T]$.

3. Pour obtenir 1 dollar, il faut débourser S_t euros à la date t.

4. Enfin, sur le marché il existe des contrats forwards pour toute date $t \in [0, T]$. Un contrat forward contracté à la date t est déterminé par l'échange de flux suivant:

   - Aucun échange de flux à la date d'entrée t dans le contrat.
   - A l'échéance T, on reçoit 1 \$ contre F_t €, montant fixé à la date d'entrée t du contrat.

1. Soit $t \in [0, T]$. Donner le pay-off à la date T, en euros, en fonction de la valeur du taux de change S_T, des portefeuilles suivants, constitué à la date t

(1) Achat de B_t^f dollars. Ce montant est alors placé dans l'actif sans risque de l'économie américaine.
Emprunt de $F_t B_t^d$ euros (grâce à l'actif sans risque **domestique**).

(2) Contrat forward contracté à l'instant t.

En déduire, par un raisonnement d'arbitrage, le prix F_t en fonction de la valeur du taux de change S_t à l'instant t.

2. Donner le pay-off en euros à la date T du portefeuille constitué à partir d'un contrat de prix forward F_0 et de la vente à découvert à la date t du contrat de prix forward F_t. En déduire par un raisonnement d'arbitrage, la valeur en euro f_t^0 à la date t du contrat forward contracté en 0 en fonction de F_t et F_0, puis en fonction de S_t et S_0.

Arbres

Exercice 5 : Arbre binomial à une période

On considère un marché à 2 dates avec un actif risqué et un actif sans risque de dynamique:

$$\text{Actif sans risque: } 100 \quad \rightarrow \quad 105 \qquad\qquad \text{Actif risqué: } 100 \begin{array}{l} \nearrow \; 120 \\ \\ \searrow \; 90 \end{array}$$

L'actif risqué a une probabilité 0.75 de monter et 0.25 de descendre.

1. Décrire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2. Donner la définition de la probabilité risque neutre. La calculer.

3. Calculer le prix d'un call et d'un put de strike 100.

4. Retrouver la relation de parité call put.

Exercice 6 : Option lookback en modèle binomial à deux périodes

On se place dans le cadre d'un modèle binomial à trois dates: $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$ avec $r = 0.05$, $u = 1.1$ et $d = 0.95$ et $S_0 = 100$.

1. Représentez l'arbre d'évolution de l'actif risqué.

2. Décrire Ω, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

3. Déterminez la probabilité risque neutre.

4. Quel est le prix d'un call de strike 105 d'échéance $T = 2$?

5. Déterminez le prix d'une option lookback de payoff final:

$$(S_2^* - 100)^+ \qquad \text{avec } S_t^* = Sup_{s \leq t}\, S_s$$

Exercice 7 : Convergence du modèle Binomial vers le modèle de Black Scholes

Considérons un marché financier, constitué d'un actif sans risque R normalisé en $t = 0$ et d'un actif risqué S, ouvert sur la période de temps $[0, T]$.

Divisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en n intervalles $[t_i^n, t_{i+1}^n]$ avec $t_i^n := \frac{iT}{n}$ et plaçons nous dans le cadre d'un modèle binomial à n périodes. Notons r_n le taux d'intéret de l'actif sans risque, la valeur R_t^n de l'actif sans risque aux instants $t = t_i^n$ est alors donnée par:

$$R_{t_i^n}^n \;=\; (1 + r_n)^i$$

On note X_i^n le rendement de l'actif risqué entre les instants t_{i-1}^n et t_i^n. On a alors sous la probabilité historique $\mathbb{P}^n$:

$$\mathbb{P}(X_i^n = u_n) = p_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i^n = d_n) = 1 - p_n$$

On rappelle que le vecteur $(X_1^n, \ldots, X_n^n)$ est un vecteur de variables aléatoires indépendantes.

Soit r et σ deux constantes positives, r_n, d_n et u_n ont la forme suivante:

$$r_n \;=\; \frac{rT}{n} \qquad\qquad d_n \;=\; \left(1 + \frac{rT}{n}\right) e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \qquad\qquad u_n \;=\; \left(1 + \frac{rT}{n}\right) e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$$

1. Représentez l'arbre d'évolution de l'actif risqué dans le modèle.

2. Montrez que R_T^n converge vers e^{rT} lorsque n tend vers l'infini.

3. Le marché vérifie t'il l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage?

4. Exprimez la valeur $S_{t_i^n}^n$ de l'actif risqué en t_i^n en fonction de S_0 et de $(X_1, \ldots, X_i)$.

5. Donnez la dynamique du processus X^n sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}_n$.
La probabilité $\mathbb{Q}_n(X_i^n = u_n)$ sera notée q_n dans la suite.

6. Vérifiez que l'on a:

$$q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \qquad\qquad n\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[ln(X_1^n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \qquad\qquad n\,Var_{\mathbb{Q}^n}[ln(X_1^n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2\, T$$

7. Montrez à l'aide des fonctions caractéristiques la convergence en loi suivante:

$$\sum_{i=1}^{n} lnX_i^n \;\underset{n\to\infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}}\; \mathcal{N}\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma^2\, T\right] .$$

8. En déduire que:

$$S_T^n \;\underset{n\to\infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}}\; S_0\, e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \,+\, \sigma\, W_T} \qquad\qquad \text{avec } W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$$

La dynamique de la limite est, comme vous le verrez, celle que l'on supposera dans le modèle de Black & Scholes.

9. Ecrire sous forme d'espérance le prix d'un put de strike K et de maturité T dans le modèle binomial à n périodes.

10. En déduire que le prix du put converge lorsque n tend vers l'infini vers:

$$P_0 \;\; := \;\; K\, e^{-rT}\, \mathcal{N}(-d_2) \; - \; S_0 \mathcal{N}(-d_1)$$

Avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par:

$$d_1 \; := \; \frac{ln(\frac{S_0}{K}) \; + \; (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 \; := \; d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

11. Conclure en obtenant la formule de Black & Scholes donnant le prix du call:

$$C_0 \;\; := \;\; S_0 \mathcal{N}(d_1) \; - \; K\, e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

Exercice 8 : Duplication d'un produit dérivé en modèle binomial à n périodes

Suivre la démonstration distribuée en cours sur ce sujet.

Martingales

Exercice 9 : Tranformée de Martingale

Soit $(S_i)_{i\leq n}$ une $\mathbb{F}$-martingale et $(H_i)_{i\leq n}$ un processus discret borné $\mathcal{F}$-adapté. On définit le processus $(M_i)_{i\leq n}$ par:

$$M_i \;:=\; \sum_{j=1}^{i} H_{j-1}\,(S_j - S_{j-1})$$

1. Montrez que le processus P est également une $\mathbb{F}$-martingale.

2. Dans un modèle binomial à n périodes, si l'actif risqué réactualisé est martingale sous la probabilité risque neutre, qu'en déduire sur les stratégies autofinancantes de portefeuille simples ?

Exercice 10 : Martingales de carré intégrable

Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une $\mathcal{F}$-martingale de carré intégrable, i.e. telle que pour tout t, $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$

1. Montrez que, pour $s \leq t$, on a:

$$\mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2/\mathcal{F}_s]$$

2. En déduire que M_t^2 est une $\mathcal{F}$-sousmartingale. Aurait on pu obtenir ce résultat plus rapidement?

Exercice 11 : Limite $\mathcal{L}^2$ de variables aléatoires Gaussiennes

Soit X_n une suite de variables aléatoires réelles admettant pour lois respectives les lois normales $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$.
Montrer que si X_n converge dans $\mathcal{L}^2$ vers X, alors $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m et σ^2 les limites respectives des suites m_n et σ_n.

Mouvement Brownien

Exercice 12 : Calcul d'espérances Soit B un processus continu et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. Soit

$$S_t = S_0 \exp\left[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\right].$$

Calculer l'espérance et la variance de S_t.

Exercice 13 : Martingales

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Mouvement Brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle, montrer que les processus suivants sont des $\mathcal{F}$-martingales:

- $(B_t)_{t\geq 0}$
- $\left(B_t^2 - t\right)_{t\geq 0}$
- $\left(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}\right)_{t\geq 0}$ *appelé Brownien Exponentiel.*

Exercice 14 : Caractérisation du Mouvement Brownien

Soit B un processus continu et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. Montrer que B est un mouvement Brownien si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus complexe M^λ défini par:

$$M_t^\lambda \quad := \quad e^{i\lambda B_t + \frac{\lambda^2 t}{2}}$$

est une $\mathcal{F}$-martingale.

Exercice 15 : Mouvements Browniens

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un Mouvement Brownien. Montrez que les processus suivants sont également des Mouvements Browniens:

- $\left(\frac{1}{a} B_{a^2 t}\right)_{t\geq 0}$
- $(B_{t+t_0} - B_{t_0})_{t\geq 0}$
- Le processus défini par $tB_{1/t}$ pour $t > 0$ et prolongé par 0 en $t = 0$.

Exercice 16 : Limite á l'infini du Brownien L'objectif de cet exercice est de montrer que $\frac{W_t}{t}$ converge presque sûrement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

1. Pourquoi la suite $\left(\frac{W_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers l'infini?

2. Vérifier que pour $t \in [n, n+1]$,
$$\left|\frac{W_t}{t}\right| \leq \left|\frac{W_n}{n}\right| + \frac{\sup_{t\in[n,n+1]} |W_t - W_n|}{n}.$$

3. Pourquoi les variables aléatoires $\left(X_n = \sup_{t\in[n,n+1]}(W_t - W_n)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles identiquement distribuées?
Vérifier que $X_0 \leq (\sup_{t\in[0,1]} W_t)^2 + (\sup_{t\in[0,1]} -W_t)^2$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_0) \leq 2$.

4. Montrer que $\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{X_n}{n^2}\right) < +\infty$. En déduire que la suite $\left(\frac{X_n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 et conclure

Exercice 17 : Mouvement brownien?

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Pour tout $t \geq 0$ on pose $X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique $X = \{X_t; t \geq 0\}$ a des trajectoires continues et X_t suit une loi normale $\mathcal{N}(0, t)$. Est-ce un mouvement brownien?

Exercice 18 : Transformée de Laplace

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Pour chaque réel $u \in \mathbb{R}$, on pose:
$$\varphi(u) = \mathbb{E}\left[e^{u(X-\mu)}\right].$$
Pour chaque u, calculer $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$, $\varphi^{(2)}(u)$ et $\varphi^{(4)}(u)$. En déduire $\mathbb{E}[(X-\mu)^4] = 3\sigma^4$.

Exercice 19 : Propriété de Markov

Soit B un processus continu et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. Pour toute fonction mesurable bornée f et $t > s$, exprimer $\mathbb{E}[f(B_t)|\mathcal{F}_s]$ en fonction de B_s.

Exercice 20 : Loi du logarithme itéré

1. Montrez que si X est une Normale centrée réduite, pour tout $\lambda > 0$, on a:

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \quad \leq \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

2. En déduire que si W est un Mouvement brownien standard:

$$\overline{lim}_{n\to\infty} \frac{|W_n|}{\sqrt{2n \log n}} \quad \leq \quad 1$$

Pour information, un résultat dû à Paul Levy, nommé "loi du logarithme itéré" indique plus précisément que:

$$\overline{lim}_{t\to\infty} \frac{|W_t|}{\sqrt{2t \log t}} \quad = \quad 1$$

Exercice 21 : Pont Brownien

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un M.B.S. On définit un nouveau processus $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ par :

$$Z_t = B_t - tB_1.$$

1. Montrer que $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ est un processus gaussien indépendant de B_1.
2. Calculer la moyenne m_t et la fonction de covariance $K(Z_s, Z_t)$ du processus $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$.
3. Montrer que $\tilde{Z}_t = Z_{1-t}$ a même loi que Z_t.
4. Soit $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$ défini pour $0 \leq t < 1$.
   (a) Montrer que Y_t tend vers 0 presque sûrement lorsque t tend vers 1.
   (b) Montrer que le processus $(Y_t)_{0\leq t\leq 1}$ prolongé par 0 en 1 a la même loi que $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$.

Exercice 22 : Fourier

Soient $(B_t^1)_{0\le t\le T}$ et $(B_t^2)_{0\le t\le T}$ deux mouvements Browniens réels indépendants adaptés à la même filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$.

Soient $(H_t^1)_{0\le t\le T}$ et $(H_t^2)_{0\le t\le T}$ deux processus (CADLAG) adaptés à $\mathcal{F}$ et vérifiant

$$\forall t \in [0,T], \quad (H_t^1)^2 + (H_t^2)^2 = 1.$$

1. Montrer que les intégrales stochastiques $\int_0^t H_s^i dB_s^i$ pour $i = 1, 2$ sont bien définies pour tout $t \le T$.

2. On considère le processus $(X_t)_{t\le T}$ défini par

   $$\forall t \in [0,T], \quad X_t = \int_0^t H_s^1 dB_s^1 + \int_0^t H_s^2 dB_s^2.$$

   Montrer que $(X_t)_{t\le T}$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}$. Le processus X est-il continu ?

3. On définit, pour tout $u \in \mathbb{R}$, le processus $(M_t^u)_{t\le T}$ par

   $$\forall t \in [0,T], \quad M_t^u = \exp(iuX_t) + \frac{u^2}{2}\int_0^t \exp(iuX_s)ds.$$

   Montrer en utilisant la formule d'Itô (on admettra sa validité sur les fonctions complexes) que (M_t^u) est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}$.

4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[M_t^u]$ pour $t \in [0,T]$ puis une équation différentielle ordinaire vérifiée par $f^u : t \longmapsto \mathbb{E}[e^{iuX_t}]$ dont on explicitera une solution.

5. Soit $t \in [0,T]$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_t ?

6. On note, pour $u \in \mathbb{R}$ et $0 \le s \le t \le T$,

   $$\phi^u(t,s) = \mathbb{E}\left[\exp\big(iu(X_t - X_s)\big) \,\big|\, \mathcal{F}_s\right].$$

   Calculer $\phi^u(s,s)$ et montrer que

   $$\phi^u(t,s) = 1 - \frac{u^2}{2}\int_s^t \phi^u(v,s)dv.$$

   Déterminer explicitement la fonction ϕ^u. Remarquez que ϕ^u n'est pas aléatoire.

7. Montrer que le processus $(X_t)_{0\le t\le T}$ est un mouvement Brownien.

Mouvement Brownien et Intégrale d'Ito

Dans tout ce qui suit, B désigne un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.

Exercice 23 : Zéros du mouvement brownien. Soient $0 < t_0 < t_1$. On désigne par α la probabilité que B admette au moins un zéro dans l'intervalle $[t_0, t_1]$:

$$\alpha = \mathbb{P}(\exists t \in]t_0; t_1[, B_t = 0).$$

Le but est de calculer explicitement la valeur de α.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $X = (a + B_t)_{t \geq 0}$. En utilisant la densité $f_{T_{-a}}$ du premier temps d'atteinte de $-a$ par un mouvement brownien standard

$$f_{T_{-a}}(x) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-a^2/(2x)} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

   calculer $\mathbb{P}(\inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq 0)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la probabilité pour que B admette au moins un zéro dans $[t_0; t_1]$, sachant que $B_{t_0} = a$, est donnée par:

$$\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1 - t_0} \frac{1}{x^{3/2}} e^{-a^2/(2x)} \, dx.$$

3. En déduire que:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{t_1}{t_0} - 1}.$$

Exercice 24 : Fonction caractéristique de l'intégrale de Wiener. Soit $\sigma(t)$ une fonction détérministe du temps telle que $\int_0^t \sigma(s)^2 ds < \infty$ pour tout $t > 0$ et soit $X_t = \int_0^t \sigma(s) dB_s$. En utilisant la formule d'Itô, montrer que la fonction caractéristique de X_t (t fixé) est donnée par

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = \exp\{-\frac{u^2}{2} \int_0^t \sigma(s)^2 ds\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Que peut-on en déduire?

Exercice 25 : Intégrale de Wiener

Soit f telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ dt$ est finie. On considère le processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$ défini par :

$$X_t \quad = \quad \int_0^t f(u)\ dB_u,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Mvt Brownien Standard et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle.

1. Montrer qu'une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ d'une suite de variable aléatoires Gaussienne est nécessairement Gaussienne.

2. En déduire que le processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus Gaussien caractérisé par:

$$cov\left(\int_0^t f(s)dB_s, \int_0^u g(s)dB_s\right) \quad = \quad \int_0^{t\wedge u} f(s)g(s)ds$$

3. Montrer que X_t est un processus à accroissements indépendants.

4. Quelle est la loi de X_1?

Exercice 26 : Calcul de $\int_0^T B_s\, dB_s$

On cherche à calculer $\int_0^T B_s\, dB_s$ avec $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ un Mouvement Brownien standard. Pour tout entier n, considérons le processus défini sur $[0,T]$ par:

$$B_s^n \quad := \quad B_{i\frac{T}{n}}\ \mathbf{1}_{]i\frac{T}{n},(i+1)\frac{T}{n}[}(s)$$

1. Montrer que B est la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega,[0,T])$ du processus élémentaire B^n.

2. En déduire que le processus $\int_0^T B_s\, dB_s$ s'écrit comme limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de:

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_{i\frac{T}{n}}\left(B_{(i+1)\frac{T}{n}} - B_{i\frac{T}{n}}\right)$$

3. Quelle est la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{(i+1)\frac{T}{n}} - B_{i\frac{T}{n}}\right)^2$$

4. En déduire la valeur de:

$$\int_0^T B_s\, dB_s$$

Remarquez que le processus obtenu est, comme attendu, une martingale.

Exercice 27 : Théorème de Girsanov simplifié Soit $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien standard de filtration associée $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$L_t = \exp\left(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right).$$

a) Montrer que L est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-martingale et que $\mathbb{E}[L_t] = 1$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

b) Pour $A \in \mathcal{F}_T$, on pose

$$\mathbb{P}^{L_T}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T \mathbf{1}_A].$$

Pour tout $t \in [0, T]$, montrer que $\mathbb{P}^{L_t}$ est une probabilité.

c) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, $\mathbb{P}^{L_T}(A) = \mathbb{P}^{L_t}(A)$.

d) Montrer la formule de Bayes suivante:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{L_T}}[Y|\mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T Y|\mathcal{F}_t]}{L_t}, \quad t \in [0, T],$$

pour toute v.a. $Y \in L^2(\mathbb{P})$.

e) On pose $B_t^* = B_t - \theta t$ pour tout $t \in [0, T]$. Montrer que pour tout $s \leq t$, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{L_T}}\left[e^{iu(B_t^* - B_s^*)}|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{L_T}}\left[e^{iu(B_t^* - B_s^*)}\right] = e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}.$$

f) En déduire que B^* est un $\mathbb{P}^{L_T}$-mouvement brownien standard de filtration $\mathcal{F}$.

Exercice 28 : EDS et brownien géométrique On s'intéresse à la solution X_t de l'EDS:

$$X_t = \int_0^t (\mu X_r + \mu')\, dr + \int_0^t (\sigma X_r + \sigma')\, dB_r.$$

On pose $S_t = \exp\big((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\big)$.

1. Ecrire l'EDS dont S_t^{-1} est solution.

2. Démontrer que:

$$d(X_t S_t^{-1}) = S_t^{-1}\big((\mu' - \sigma\sigma')dt + \sigma' dB_t\big).$$

3. En déduire une expression pour X_t.

Exercice 29 : Sous-martingale Soit X_t un processus adapté tel que

$$X_t = \int_0^t \mu(r)dr + \int_0^t \sigma(r)dB_r,$$

où on suppose que $\mu(t) \geq 0$ p.s. pour tout $t \geq 0$ et que $\sigma = (\sigma(t))$ est adapté et tel que $\mathbb{E}[\int_0^t \sigma(s)^2 ds] < \infty$ pour tout $t > 0$. Montrer que X est une sous-martingale.

Exercice 30 : Mouvement brownien changé de temps.
Considérons le processus

$$X_t = e^{-t} W_{\frac{e^{2t}-1}{2}}, t \geq 0.$$

1. Montrer que X est un processus gaussien centré. Calculer sa fonction covariance.
2. Justifier que que X_t converge en loi vers une variable gaussienne dont on précisera les paramètres.
3. On souhaite montrer que X suit l'équation différentielle stochastique

$$X_t = -\int_0^t X_s ds + B_t, \tag{1}$$

pour un certain mouvement brownien B (construit à partir de W). Nous allons d'abord montrer qu'on peut écrire

$$W_{\frac{e^{2t}-1}{2}} = e^t B_t - \int_0^t e^s B_s ds, \quad \forall t. \tag{2}$$

En fait, au lieu de construire B à partir de W (ce qui sera faisable plus tard dans le cours), nous allons construire W à partir de B. Pour cela, posons $Y_t = e^t B_t - \int_0^t e^s B_s ds$, à identifier avec $W_{\frac{e^{2t}-1}{2}}$ pour un certain W.

   (a) Prouver qu'il suffit d'établir que $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $(W_{\frac{e^{2t}-1}{2}})_{t\geq 0}$ ont même fonction de covariance.

   (b) Établir l'égalité des fonctions de covariance.

   (c) De (2), déduire (1) (on calculera $X_t + \int_0^t X_s ds$).

Nous verrons dans la suite du cours que le processus X est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, dont le rôle est central dans certains modèles de taux d'intérêt (Vasicek, 1977).

Exercice 31 : Loi du sup du mouvement brownien. Le but de cet exercice est de calculer la loi du couple $(B_t, \sup_{0\le s\le t} B_s)$.

1. Soit T un temps d'arrêt borné. En utilisant le théorème d'arrêt de Doob, montrer que pour z réel et $0 \le u \le v$
$$\mathbb{E}[e^{iz(B_{v+T}-B_{u+T})}|\mathcal{F}_{u+T}] = e^{-z^2(v-u)/2}.$$

2. En déduire que $B_u^T = B_{u+T} - B_T$ est un $\mathcal{F}_{u+T}$-mouvement brownien indépendant de la tribu $\mathcal{F}_T$.

3. Soit $(Y_t)_t$ un processus aléatoire continu indépendant de la tribu $\mathcal{F}$ tel que $\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le K}|Y_s|] < +\infty$. Soit S une variable aléatoire bornée par K. Montrer que:
$$\mathbb{E}[Y_S|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[Y_t]_{|t=S}.$$

4. On pose $\tau_\lambda = \inf\{s \ge 0; B_s > \lambda\}$. Démontrer que si f est une fonction borélienne bornée
$$\mathbb{E}\big[f(B_t)\mathbf{1}_{\{\tau^\lambda\le t\}}\big] = \mathbb{E}\big[\phi(t-\tau^\lambda)\mathbf{1}_{\{\tau^\lambda\le t\}}\big],$$
où $\phi(u) = \mathbb{E}[f(B_u+\lambda)]$. En déduire que
$$\mathbb{E}\big[f(B_t)\mathbf{1}_{\{\tau^\lambda\le t\}}\big] = \mathbb{E}\big[f(2\lambda - B_t)\mathbf{1}_{\{\tau^\lambda\le t\}}\big].$$

5. Montrer que si $B_t^* = \sup_{0\le s\le t} B_s$ et si $\lambda > 0$:
$$\mathbb{P}(B_t \le \lambda, B_t^* \ge \lambda) = \mathbb{P}(B_t \ge \lambda, B_t^* \ge \lambda) = \mathbb{P}(B_t \ge \lambda).$$
En déduire que B_t^* suit la même loi que $|B_t|$.

6. Démontrer que pour $\lambda \ge \mu$ et $\lambda \ge 0$:
$$\mathbb{P}(B_t \le \mu, B_t^* \ge \lambda) = \mathbb{P}(B_t \ge 2\lambda - \mu, B_t^* \ge \lambda) = \mathbb{P}(B_t \ge 2\lambda - \mu)$$
et que si $\lambda \le \mu$ et $\lambda \ge 0$:
$$\mathbb{P}(B_t \le \mu, B_t^* \ge \lambda) = 2\mathbb{P}(B_t \ge \lambda) - \mathbb{P}(B_t \ge \mu).$$

7. Vérifier que la loi du couple (B_t, B_t^*) est donnée par:
$$\mathbf{1}_{\{0\le y\}}\mathbf{1}_{\{x\le y\}}\frac{2(2y-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\big(-\frac{(2y-x)^2}{2t}\big)dxdy.$$

Formule d'Ito

Dans tout ce qui suit, B désigne un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.

Exercice 32 : Covariation quadratique & Formule d'Intégration par partie

La covariation quadratique entre 2 processus X et Y est par définition:

$$\langle X, Y\rangle \quad := \quad \frac{1}{4}\left(\langle X+Y\rangle - \langle X-Y\rangle\right)$$

1. Montrer que l'application $(X,Y) \mapsto \langle X, Y\rangle$ est bilinéaire.

2. Soient X^1 et X^2 deux processus d'Ito de la forme

$$dX_t^i \quad = \quad \varphi_t^i \, dt \, + \, \theta_t^i \, dW_t$$

Montrer que la covariation quadratique entre X^1 et X^2 est donnée par

$$\langle X^1, X^2\rangle_t \quad = \quad \int_0^t \theta_s^1 \, \theta_s^2 \, ds$$

3. Soient X et Y deux processus d'Ito, démontrer la formule d'intégration par partie:

$$d(XY)_t \quad = \quad X_s dY_s \, + \, Y_s dX_s \, + \, d\langle X, Y\rangle_s$$

Exercice 33 : Formule d'Itô

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$, un M.B.S. Donner l'équation différentielle stochastique vérifiée par les processus suivants:

- $X_t = \exp(ct + \alpha B_t)$
- $X_t = \frac{B_t}{1+t}$
- $(X_t^1, X_t^2) = (\cosh B_t, \sinh B_t)$
- $X_t = e^{\int_0^t Y_s dBs - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds}$
- $Z_t = ln\left(\frac{X_t}{1-X_t}\right)$ avec X_t satisfaisant $dX_t = X_t(1-X_t)dB_t$

Exercice 34 : Mouvement brownien géométrique Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ l'unique solution de l'EDS

$$X_t = X_0 + \alpha \int_0^t X_r dr + \int_0^t \sigma X_r dB_r,$$

c-à-d X est un mouvement Brownien géométrique (MBG). En outre, soit β une constante. Montrer que Y^β aussi est un MBG dont on précisera le drift et le coefficient de diffusion.

Exercice 35 : Comparaison de Processus

On suppose connue la fonction

$$\phi(a,T) \quad := \quad \mathbb{P}(W_t \leq at\,,\, t \leq T)$$

avec W un Mouvement Brownien.
Soient W^1 et W^2 deux mouvements Browniens indépendants et

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= X_t^1(\mu_t^1 dt + \sigma_t^1 dW_t^1)\,, \\ dX_t^2 &= X_t^2(\mu_t^2 dt + \sigma_t^2 dW_t^2)\,. \end{aligned}$$

Calculer, en fonction de Φ, la quantité

$$\mathbb{P}(X_t^1 \leq X_t^2\,,\, t \leq T)\,.$$

Exercice 36 : Processus d'Ornstein-Ulhenbeck.
Le processus d'Ornstein-Ulhenbeck est l'unique solution de l' équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t;$$

On suppose que X_0 est une variable aléatoire gaussienne indépendante de W.

1. En posant $Y_t = X_t \exp(ct)$, donner la forme explicite du processus (X_t).
2. Donner la loi de X_t. Que vaut $Cov(X_s, X_t)$?
3. Trouver la loi de X_0 telle que $\forall t$, la loi de X_t ne dépend pas de t (loi stationnaire).
4. Quelle est la loi limite de X_t lorsque $t \to +\infty$?
5. Montrer que $Z_t = \exp(a \int_0^t X_s dWs - \frac{a^2}{2} \int_0^t X_s^2 ds)$ est une martingale locale.
6. Soit $U_t = X_t^2$. Ecrire dU_t.
7. En déduire que $\int_0^t X_s dW_s = \frac{1}{2\sigma}(X_t^2 - X_0^2 - \sigma^2 t) + \frac{c}{\sigma} \int_0^t X_s^2 ds$.

Exercice 37 : Etude d'EDS. Soit l'EDS

$$dX_t = bX_t\,dt + dB_t, \quad X_0 = x.$$

1. On pose $Y_t = e^{-t}X_t$. Quelle est l'EDS vérifiée par Y_t? Exprimer Y_t sous la forme $Y_t = y + \int_0^t f(r)\,dB_r$ où l'on explicitera la fonction f.

2. Calculer $\mathbb{E}(Y_t)$ et $\mathbb{E}(Y_t^2)$.

3. Justifier que $\int_0^t Y_s\,ds$ est un processus gaussien. Calculer $\mathbb{E}[\exp(\int_0^t Y_u\,dB_u)]$.

4. Exprimer Y_t pour $t > s$ sous la forme $Y_t = Y_s + \int_s^t g(u)\,dB_u$ où l'on précisera la fonction g. Calculer $\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s]$ et $\mathrm{Var}(Y_t|\mathcal{F}_s)$.

5. Calculer $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$ et $\mathrm{Var}(X_t|\mathcal{F}_s)$.

Exercice 38 : EDP

Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. On désire résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour } t > 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

où u est une fonction de deux variables $u(t,x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ en t et $\mathcal{C}^2$ en x. Cette équation modélise l'évolution de la chaleur d'un fil au cours du temps avec une condition initiale f à $t = 0$.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un M.B.S.

1. Soit u une solution du problème précédent et $t > 0$. Montrer, en utilisant la formule d'Itô que M dÈfini sur $[0,t]$ par $M_s = u(t-s, x+B_s)$ est une martingale locale.

2. Montrer que M est une martingale. En déduire que pour tout $t > 0$, on a:

$$u(t,x) = \mathbb{E}[f(B_t + x)]$$

Black Scholes

Dans tout ce qui suit, B désigne un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.

Exercice 39 : Modèle de Black Scholes. On considére un actif risqué S obéissant à la dynamique suivante

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dB_t)$$

où $\mu, \sigma (> 0)$ sont des constantes.

1. Ecrire la formule d'Itô pour une fonction du type $f(t, S_t)$. En déduire que S_T suit une loi log-normale dont on précisera la moyenne et la variance.

2. Donner la moyenne et la variance de l'actif S_T sous la probabilité risque neutre.

3. Le payoff d'un actif contingent de type européen est donné à la date T par la quantité $1/S_T$. Utiliser la probabilité risque neutre pour montrer que le prix à la date $t < T$ de ce produit est donné par

$$\frac{1}{S_t} \exp\big((\sigma^2 - r)(T - t)\big).$$

4. Utiliser la formule d'Itô et un argument d'arbitrage pour déterminer l'équation satisfaite par la valeur $V(t, S_t)$ d'une option européenne (ie de payoff de type $P = g(S_T)$).

5. On suppose que les actifs distribuent des dividendes selon un taux continu q. r désigne le taux d'intérêt continu de l'actif sans risque. Montrer que la valeur $V(t, S_t)$ d'une option européenne satisfait l'équation

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} = rV$$

dont on précisera les conditions initiales. Exprimer le prix du call européen dans ce modèle.

Exercice 40 : Formule de Black Scholes

Soit l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t, \tag{3}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.S.

1. Soit un réel r. On pose $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$.

   (a) Montrer que $\widetilde{S}_t$ vérifie une nouvelle équation différentielle stochastique.

   (b) Soit $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$. Montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à la probabilité de départ $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.S.

   (c) Écrire que :
   $$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t \, dW_t.$$
   En déduire que $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ et que :
   $$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 \, e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

2. On pose $(x)_+ = \max(x, 0)$ et on désigne par $\mathbb{E}^*$ l'espérance sous $\mathbb{P}^*$. Soit $K > 0$ et soit $C = \mathbb{E}^*\left(e^{-rT}(S_T - K)_+\right)$. Montrer que :
   $$C = -Ke^{-rT}\Phi(d_2) + S_0\Phi(d_1),$$
   où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, $d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Exercice 41 : Symétrie Call Put

Soit M une $\mathcal{F}$- martingale telle que $dM_t = \sigma M_t dW_t$ avec σ donné et $M_0 = 1$.

1. Vérifier que M est strictement positive.

2. Déterminer la dynamique de Y défini par $Y_t = (M_t)^{-1}$.

3. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie par $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = M$. Déterminer la loi de Y sous $\mathbb{Q}$.

4. Etant donné un strike K, montrer que l'on a la relation
   $$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[(M_T - K)^+\right] \quad = \quad K \, \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{1}{K} - M_T\right)^+\right]$$

Exercice 42 : Changement de numéraire

Soient S^1 et S^2 deux processus d'Itô donnés par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dS_t^1 & = & Y_t^1 \, dt \, + \, Z_t^1 \, dB_t \\ dS_t^2 & = & Y_t^2 \, dt \, + \, Z_t^2 \, dB_t \end{array} \right.$$

avec B un mouvement Brownien de filtration naturelle $\mathcal{F}$ et Y^1, Y^2, Z^1 et Z^2 des processus $\mathcal{F}$-adaptés de $L^2(\Omega, [0,T])$.

Soient φ^1 et φ^2 deux processus adaptés bornés. Considérons le processus:

$$X_t \;\; = \;\; \varphi_t^1 S_t^1 \; + \; \varphi_t^2 S_t^2$$

et supposons qu'il satisfait la condition:

$$dX_t \;\; = \;\; \varphi_t^1 \, dS_t^1 \; + \; \varphi_t^2 \, dS_t^2$$

Montrer que pour tout processus d'Itô U $\mathcal{F}$-adapté, on a la relation:

$$d(U\,X)_t \;\; = \;\; \varphi_t^1 \, d(U\,S^1)_t \; + \; \varphi_t^2 \, d(U\,S^2)_t$$

Comment traduire cette propriété en terme de stratégie de portefeuille ?

Exercice 43 : Moments de la solution de l'EDS de Black Scholes

Soit B un Mouvement Brownien Standard. On considère l'équation différentielle de Black Scholes:

$$dS_t \; = \; S_t(\mu dt \, + \, \sigma dW_t) \qquad \text{et} \qquad S_0 \; = \; x$$

1. Montrer que l'unique solution de cette équation est :

$$S_t \;\; = \;\; x\, e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\, W_t}$$

2. Calculer $\mathbb{E}[S_t]$.

3. Pour $\alpha \geq 2$, déterminez l'EDS vérifiée par S_t^α.

4. En déduire $\mathbb{E}[S_t^\alpha]$ pour $\alpha \geq 2$.

Pricing d'Options

Exercice 44 : Option sur moyenne

Soit S le processus donné par $dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t), \qquad , S_0 = 1\,,$
avec r, σ deux constantes et B un mouvement Brownien. On souhaite calculer $C = \mathbb{E}\left[(Z_T - S_T)^+\right]$ avec $Z_T := \mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt\right]$. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie par

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_T = e^{\sigma B_T - \sigma^2 T/2}\,.$$

1. Montrer que

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[(Z_T - S_T)^+\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{Z_T}{S_T} - 1\right)^+\right]$$

2. Soit $\bar{B}_t := B_t - \sigma t$. Ecrire Z_T/S_T sous la forme $e^{\alpha T - \int_0^T \beta(t)d\bar{B}_t}$.

3. Déterminer K pour que le calcul de C se réduise au calcul de $\mathbb{E}\left[(\tilde{S}_T - K)^+\right]$ avec $\tilde{S}$ un mouvement Brownien géométrique dont on précisera la dynamique.

Exercice 45 : Produit forward-start On suppose que la dynamique du prix (en dollars) de l'action américaine FAD, qui ne verse pas de dividendes, est donnée par:

$$dS_t = S_t\big(\mu(t, S_t)\,dt + \sigma(t)\,dB_t\big),$$

où σ est une fonction déterministe du temps. Soit un call européen de date T_2 écrit sur une action FAD et de type "forward-start", c'est-à-dire que son strike n'est pas connu à sa date de création ($t = 0$) mais sera fixé égal à sa valeur $S(T_1)$ de l'action FAD observée à la date $T_1(< T_2)$. Il sera donc à la monnaie en T_1 et vaudra en T_2 (en dollars) $(S_{T_2} - S_{T_1})_+$.

1. Dériver la formule (du type Black-Scholes) donnant le prix du call en T_1 tel que côté à New-York, en utilisant la notation $\tau = T_2 - T_1$.

2. Calculer le prix du call en $t = 0$ tel que côté à New-York. Pour ce faire, utiliser la propriété d'homogénéité (de degré 1 en prix du support et en prix d'exercice) de la valeur d'une option, c'est-à-dire

$$C(S_{T_1}, S_{T_1}, \tau) = S_{T_1} C(1, 1, \tau).$$

3. Donner l'interprétation financière du résultat précédent.

4. Supposer que le prix d'exercice fixé en T_1 est égal à kS_{T_1} où k est une constante positive différente de 1 et recalculer le prix du call.

Exercice 46 : Options asiatiques Soit S_t la solution de l'EDS

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dB_t)$$

les paramètres r et σ étant constants.

1. Soit K une constante. Montrer que le processus $M_t = \mathbb{E}\Big((\frac{1}{T}\int_0^T S_r\,dr - K)_+ | \mathcal{F}_t\Big)$ est une martingale.
2. Montrer que si l'on pose $Q_t = S_t^{-1}\big(K - \frac{1}{T}\int_0^t S_r\,dr\big)$, on a
$$M_t = S_t \mathbb{E}\Big((\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_r}{S_t}\,dr - Q_t)_+ | \mathcal{F}_t\Big).$$
3. Soit $u(t,x) = \mathbb{E}\Big((\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_r}{S_t}\,dr - x)_+\Big)$. Montrer que $u(t,x) = \mathbb{E}\Big((\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_r}{S_t}\,dr - x)_+ | \mathcal{F}_t\Big)$ et que $M_t = S_t u(t, Q_t)$.
4. Ecrire la formule d'Itô pour M et en déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par u.

Exercice 47 : Réduction de variance par échantillonnage préférentiel.
Soit G une gaussienne centrée réduite.

1. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, vérifier que
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(f(G+\theta)e^{-\theta G - \frac{\theta^2}{2}}\right) = \mathbb{E}(f(G)) \tag{4}$$
2. Vérifier que
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(f(G+\theta)e^{-\theta G - \frac{\theta^2}{2}}\right) = v(\theta) - (\mathbb{E}(f(G)))^2 \text{ où } v(\theta) = \mathbb{E}\left(f^2(G)e^{-\theta G + \frac{\theta^2}{2}}\right).$$
3. On suppose désormais que $\mathbb{P}(f^2(G) > 0) > 0$.
Montrer que pour $a > 0$ suffisamment grand, $\mathbb{P}(f^2(G) > 1/a, G > -a) > 0$ et en déduire que $\lim_{\theta \to -\infty} v(\theta) = +\infty$. Montrer également que $\lim_{\theta \to +\infty} v(\theta) = +\infty$.
Calculer $v''(\theta)$ par dérivation sous le signe espérance et conclure à l'existence d'un unique $\theta^* \in \mathbb{R}$ qui minimise $\theta \to \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(f(G+\theta)e^{-\theta G - \frac{\theta^2}{2}}\right)$.
Soit $(G_i)_{i \geq 1}$ une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes. Proposer un estimateur de $\mathbb{E}(f(G))$ préférable à $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(G_i)$.
4. On suppose que la fonction f est C^1 à dérivée bornée. Quelle est la limite de $\frac{1}{\theta}\left(f(G+\theta)e^{-\theta G - \frac{\theta^2}{2}} - f(G)\right)$ lorsque θ tend vers 0?
En déduire que $\mathbb{E}(f'(G)) = \mathbb{E}(Gf(G))$. Retrouver ce résultat directement.

Exercice 48 : Les options barrière: l'EDP et l'interprétation comme espérance.
On suppose maintenant que les taux d'intérêt sont constants et égaux à r, que l'actif risqué suit une dynamique de type brownien géométrique décrite par $S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$. Les options considérées ont pour échéance T.
On considère le problème de la valorisation de l'option barrière Down-In-Call (resp. Down-Out-Call) promettant à l'échéance $\mathbf{1}_{\tau_H \le T}(S_T - K)_+$ (resp. $\mathbf{1}_{\tau_H > T}(S_T - K)_+$), avec $\tau_H = \inf\{t \ge 0 : S_t \le H\}$. Son prix à l'instant 0 sera noté simplement $\mathrm{DIC}(x, K, H)$ (resp. $\mathrm{DOC}(x, K, H)$).

1. Par un raisonnement d'arbitrage, montrer que les prix des différentes options sont reliés par la relation
$$\mathrm{DIC}(x, K, H) + \mathrm{DOC}(x, K, H) = \mathrm{Call}(0, x, K).$$

2. Pour couvrir le DOC, nous cherchons un portefeuille autofinançant dont la valeur s'écrit $V_t = v(t \wedge \tau_H, S_{t \wedge \tau_H})$ pour une certaine fonction régulière v. Déterminer l'EDP satisfaite par v (attention aux conditions aux limites qui prennent en compte la barrière) ainsi que la couverture associée.

3. Calculer $\mathbb{E}(e^{-rT\wedge\bar\tau_H} v(T \wedge \bar\tau_H, \bar S_{T\wedge\bar\tau_H}))$ et montrer que
$$\mathrm{DOC}(x, K, H) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}\mathbf{1}_{\bar\tau_H > T}(\bar S_T - K)_+\right), \tag{5}$$
où $\bar\tau_H = \inf\{t \ge 0 : \bar S_t \le H\}$ et $\bar S_t = S_0 \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$.

4. En déduire que
$$\mathrm{DIC}(x, K, H) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}\mathbf{1}_{\bar\tau_H \le T}(\bar S_T - K)_+\right), \tag{6}$$

Exercice 49 : Les options barrière: des formules explicites pour les prix.
L'objectif de cet exercice est de calculer explicitement $\mathrm{DIC}(x, K, H)$ à partir de l'égalité (6), en exploitant simplement des relations de symétrie. Nous nous restreignons au cas *regular* (à savoir $K > H$) (à l'opposé du cas *reverse* lorsque $K \leq H$).

1. Que vaut $\mathrm{DIC}(x, K, H)$ lorsque $x \leq H$?

On suppose maintenant $x > H$.

2. Montrer la relation de symétrie Call-Put

$$\mathrm{Call}(t, Ke^{-r(T-t)}, x) = \mathrm{Put}(t, xe^{-r(T-t)}, K)$$

et d'homogénéité ($\lambda \geq 0$)

$$\mathrm{Call}(t, \lambda x, \lambda K) = \lambda \mathrm{Call}(t, x, K), \quad \mathrm{Put}(t, \lambda x, \lambda K) = \lambda \mathrm{Put}(t, x, K).$$

3. On suppose dans cette question que $r = 0$.

   (a) Justifier que $(\bar{S}_t)_{t\geq 0}$ est une martingale et les prix des options pour ce cas-là seront notés $\mathrm{Call}^{\mathrm{M}}$, $\mathrm{DIC}^{\mathrm{M}}$, etc.

   (b) Montrer que $\mathrm{DIC}^{\mathrm{M}}(x, K, H) = \mathrm{Put}^{\mathrm{M}}(x, \frac{H^2}{K})\frac{K}{H} = \mathrm{Call}^{\mathrm{M}}(H, K\frac{x}{H})$.

   (c) En déduire une stratégie statique de couverture de l'option DIC dans le cas $r = 0$.

4. Introduisons $\gamma = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$. Supposons d'abord que $\gamma > 0$.

   (a) Prouver qu'on a $\bar{S}_t = (M_t)^{1/\gamma}$ pour une certaine martingale log-normale M.

   (b) Considérons l'option Binary DIC (resp. Binary Call) promettant à l'échéance $\mathbf{1}_{\tau_H\leq T}\mathbf{1}_{S_T\geq K}$ (resp. $\mathbf{1}_{S_T\geq K}$). Son prix vaut $\mathrm{BinDIC}(x, H, K) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}\mathbf{1}_{\bar{\tau}_H\leq T}\mathbf{1}_{\bar{S}_T\geq K}\right)$ (resp. $\mathrm{BinCall}(x, K) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}\mathbf{1}_{\bar{S}_T\geq K}\right)$).
   En passant par l'intermédiaire de la martingale M, montrer

   $$\forall K \geq H \quad \mathrm{BinDIC}(x, H, K) = \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma} \mathrm{BinCall}(H, K\frac{x}{H}).$$

   (c) En déduire que le prix de l'option DIC est donné par la formule

   $$\mathrm{DIC}(x, H, K) = \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} \mathrm{Call}(H, K\frac{x}{H}).$$

5. Généraliser la formule précédente à toutes les valeurs de γ.

Modeles de Taux

Exercice 50 : Le modèle de Vasiček pour le taux d'intérêt

On considère un marché financier où il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ qui rende tout actif réactualisé martingale. Sous cette probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, le taux d'intérêt spot est décrit par la dynamique suivante

$$\begin{aligned} dr_t &= (a - br_t)\, dt + \sigma dB_t \,, \\ r_0 &= r \end{aligned} \tag{7}$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard, et où a, b, σ et r sont des constantes strictement positives.

1. Déterminez l'EDS satisfaite par le processus $X_t = e^{bt} r_t$.
2. Déterminez la solution X_t, puis déduisez la solution r_t de l'EDS (7)
3. Vérifiez que la variable aléatoire r_t suit une loi normale. Calculez sa moyenne et sa variance.

   On considère, dans ce marché, un zéro-coupon de maturité T. C'est à dire une obligation qui verse à la personne qui la détient 1 unité monétaire à la maturité T.
4. Déduisez que le zéro-coupon est un produit dérivé particulier et donnez son pay-off à la date T.
5. En utilisant l'évaluation neutre au risque, montrez que le prix à la date t du zéro-coupon , noté $P(t,T)$, est égal à

$$P(t,T) \quad = \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) |\mathcal{F}_t \right] \tag{8}$$

6. Calculez explicitement $P(t,T)$.

Exercice 51 : Stratégies autofinancées de zéro–coupons.

On considère le modèle de Heath–Jarrow–Morton : pour tout $T > 0$ le taux instantané forward de maturité T est décrit par

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu_f(s,T)ds + \int_0^t \sigma_f(s,T)dW_s,$$

où $\sigma_f(\cdot,T)$ est une fonction continue bornée. La fonction $\mu_f(s,T)$ est définie par

$$\mu_f(s,T) = \sigma_f(s,T)\sigma_f^*(s,T), \text{ avec } \sigma_f^*(s,T) := \int_s^T \sigma_f(s,u)du.$$

On admet que le prix au temps $0 \leq t \leq T$ d'un zéro–coupon de maturité T est donné par

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right). \tag{9}$$

Soit r_t le taux instantané $f(t,t)$:

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma_f(s,t)\sigma_f^*(s,t)ds + \int_0^t \sigma_f(s,t)dW_s. \tag{10}$$

De (9) et (10) on peut déduire (l'admettre...) que, pour tout T, le processus $(B(t,T), t \leq T)$ résout l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dB(t,T) &= r_t B(t,T)dt - \sigma_f^*(t,T)B(t,T)dW_t, \\ B(T,T) &= 1. \end{cases} \tag{11}$$

On se donne deux maturités T^O et T avec $T^O < T$. À chaque date $0 \leq t \leq T^O$, une stratégie autofinancée consiste à acheter ou vendre une quantité H_t^O de zéro–coupons de maturité T^O et une quantité H_t de zéro–coupons de maturité T telles que:

(i) Le portefeuille est autofinancé, c'est–à–dire : si on note

$$V_t := H_t^O B(t,T^O) + H_t B(t,T)$$

la valeur au temps t du portefeuille, alors

$$V_t = V_0 + \int_0^t H_\theta^O dB(\theta,T^O) + \int_0^t H_\theta dB(\theta,T).$$

(ii) Les processus (H_t^O) et (H_t) sont tels que les intégrales stochastiques qui apparaîtront dans les calculs sont bien définies et sont des martingales.

1. L'objectif est de caractériser les stratégies autofinancées. Pour $t \leq T^O$ on définit le prix Forward $B^F(t,T)$ du zéro–coupon de maturité T par

$$B^F(t,T) := \frac{B(t,T)}{B(t,T^O)}.$$

Montrer

$$d\left(\frac{1}{B(t,T^O)}\right) = -\frac{1}{B(t,T^O)}(r_t dt - \sigma_f^*(t,T^O)dW_t) + \frac{1}{B(t,T^O)}\sigma_f^*(t,T^O)^2 dt,$$

puis

$$dB^F(t,T) = B^F(t,T)\sigma_f^*(t,T^O)(\sigma_f^*(t,T^O) - \sigma_f^*(t,T))dt + B^F(t,T)(\sigma_f^*(t,T^O) - \sigma_f^*(t,T))dW_t.$$

2. Soit V_t^F la valeur Forward du portefeuille définie par

$$V_t^F := \frac{V_t}{B(t,T^O)}.$$

En appliquant la formule d'Itô, montrer

$$dV_t^F = H_t dB^F(t,T).$$

Montrer que cette égalité s'obtient aussi (et plus rapidement) par la technique du changement de numéraire.

Exercice 52 : Stratégie de couverture d'options sur zéro–coupon.
On considère une option de maturité T^O et de flux à l'échéance égal à $\Phi(B(T^O, T))$, où Φ est une fonction donnée.

1. À l'aide de (11) montrer que les processus

$$\left(B(t, T^O) \exp\left(-\int_0^t r_\theta d\theta\right), t \leq T^O\right)$$

et

$$\left(B(0, T^O) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_f^*(\theta, T^O)^2 \, d\theta - \int_0^t \sigma_f^*(\theta, T^O) \, dW_\theta\right), t \leq T^O\right)$$

sont solutions de la même équation différentielle stochastique.

2. Montrer que le processus défini pour $0 \leq t \leq T^O$ par

$$L_t := \frac{B(t, T^O)}{\exp(\int_0^t r_\theta d\theta) B(0, T^O)}$$

est une martingale exponentielle.

3. Considérer la probabilité forward risque neutre $\mathbb{P}^F$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_{T^O})$ définie par

$$\frac{d\mathbb{P}^F}{d\mathbb{P}} = L_{T^O}.$$

Montrer que, sous $\mathbb{P}^F$, les processus $(B^F(\cdot, T))$ et (V_t^F) sont des martingales.

4. On suppose qu'il existe une solution régulière π_{σ_f} au problème parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_{\sigma_f}}{\partial t}(t, x) + \dfrac{1}{2} x^2 (\sigma_f^*(t, T) - \sigma_f^*(t, T^O))^2 \dfrac{\partial^2 \pi_{\sigma_f}}{\partial x^2}(t, x) = 0, \\ \pi_{\sigma_f}(T^O, x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Montrer

$$V_t^F = \pi_{\sigma_f}(t, B^F(t, T)).$$

Indication : on pourra commencer par vérifier

$$V_t^F = \mathbb{E}^F[\phi(B^F(T^O, T)) | \mathcal{F}_t] \text{ p.s.}$$

5. Montrer que la stratégie de couverture de l'option est

$$\begin{cases} H_t &= \dfrac{\partial \pi_{\sigma_f}}{\partial x}(t, B^F(t, T)), \\ H_t^O &= \pi_{\sigma_f}(t, B^F(t, T)) - H_t B^F(t, T). \end{cases}$$