Notations:

$(E, \mathcal{E})$ Espace mesurable $\qquad p : E \times \mathcal{E} \to [0,1]$ noyau de transition

i.e. (1) $\forall x \in E$, $p(x, \cdot)$ est une proba
(2) $\forall A \in \mathcal{E}$, $p(\cdot, A)$ est mesurable

$(X_n) = (X_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ p-MC par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$

si X_n mesurable $\mathcal{F}_n$ (souvent $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$) et
$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = p(X_n, B)$ $\forall B \in \mathcal{E}$ et $\forall n$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n) \overset{(*)}{=} \int_{B_0} \dots \int_{B_n} \mu(dx_0)\, p(x_0, dx_1)\, p(x_1, dx_2) \dots p(x_{n-1}, dx_n)$$

avec μ loi de X_0

Obs.: (X_n) est une p-MC avec $X_0 \sim \mu$ et $(\mathcal{F}_n) = (\mathcal{F}_n^X)$ ssi on a $(*)$ $\forall n$ et $\forall B_0, \dots, B_n \in \mathcal{E}$.

"Exemple" de MC: fonctions aléatoires itérées

$h : E \times \tilde{E} \to E$ mesurable
$\quad \mathcal{E} \otimes \tilde{\mathcal{E}} \quad \mathcal{E}$

$(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ IID sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\xi_n : \Omega \to \tilde{E}$
et X_0 v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$X_0 : \Omega \to E \qquad X_0 \perp\!\!\!\perp (\xi_n)$

alors $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$ forme une p-MC avec $p(x, A) = \mathbb{P}(h(x, \xi_1) \in A)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \hat{\mathcal{E}}$

Cas de E dénombrable (fini ou infini):

$Q(x,y) = p(x, \{y\})$ donc
1. $Q(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y$
2. $\sum_y Q(x,y) = 1 \quad \forall x$

$\Big\}$ "matrice" stochastique

Espace canonique: $\Omega = E^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$ donc $\omega \in \Omega$ est une suite: $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$

$\mathcal{G} = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}\cup\{0\}} = \sigma\left(\{\omega : \omega_1 \in B_1, \dots, \omega_n \in B_n\}, B_i \in \mathcal{E}, n = 0,1,2,\dots\right)$

$(\theta_m \omega)_n = \omega_{n+m}$ (donc $\theta_m : \Omega \to \Omega$)

Notation: si $X_0 \sim \mu$ alors on met μ dans la notation, i.e. $\mathbb{P}_\mu(X_0 \in B) = \mu(B)$

si $\mu = \delta_k$ (i.e. $X_0 \overset{p.s.}{=} k$) on note $\mathbb{P}_k$ à la place de $\mathbb{P}_{\delta_k}$.

Propriété de Markov Simple: si (X_n) est une p-MC, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X$, $(\Omega, \mathcal{G})$ canonique

alors $\forall\, Y$ bornée mesurable et $\forall n$

$$\mathbb{E}[Y \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[Y]$$

Rappel: $T : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{\infty\}$ temps d'arrêt ssi $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$

Si T est temps d'arrêt, $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{G} : A \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

Propriété de Markov forte: T temps d'arrêt, Y bornée mesurable

alors $\mathbb{E}[Y \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T] \mathbb{1}_{T<\infty} = \mathbb{E}_{X_T}[Y] \mathbb{1}_{T<\infty}$

Corollaire: si T est temps d'arrêt t.q. $\mathbb{P}(T<\infty) = 1$ et il existe $y \in E$ t.q.

$\mathbb{P}(X_T = y) = 1$ alors sous $\mathbb{P}$ on a que

$\theta_T \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T$ et la loi de θ_T est $\mathbb{P}_y$.

$y \in E$: $T_y^0 := 0$ et $T_y^k \overset{k \geq 1}{=} \inf\{n > T_y^{k-1} : X_n = y\}$ "Temps de k-ième visite en y"

Notation : $\rho_{x,y} = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$ $T_y := T_y^1$

Théorème : $\mathbb{P}_x(T_y^k < \infty) = \rho_{xy}\, \rho_{yy}^{k-1}$

Déf. : x récurrent si $\rho_{xx} = 1$ et x transitoire si $\rho_{xx} < 1$.

On introduit $N(y) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = y}$

$\Rightarrow$ si y est récurrent on a $\mathbb{P}_y(T_y^1 < \infty) = \rho_{yy} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}_y(T_y^k < \infty \ \forall k) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}_y(N(y) = \infty) = 1$

Si y est transitoire $\Rightarrow N(y) \overset{\mathbb{P}_y}{\sim} \mathrm{Geom}(1 - \rho_{yy})$ i.e. $\mathbb{P}_y(T_y^k < \infty)$

"$\mathbb{P}_y(N(y) \geq k) = \rho_{yy}^k$"

et $\mathbb{E}_x[N(y)] = \dfrac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}} \in [0, \infty)$

Donc y récurrent ssi $\mathbb{E}_y[N(y)] < \infty$.

Théorème : si $\rho_{xx} = 1$ et $\rho_{xy} > 0$ alors $\rho_{yy} = \rho_{yx} = 1$ (donc $\rho_{xy} = 1$).

Déf : $C \in \mathcal{E}$ est fermé si $\forall x \in C$ on a $\mathbb{P}_x(X_n \in C) = 1 \ \forall n$.

Si E est dénombrable alors C est fermé ssi $x \in C$ et $\rho_{xy} > 0 \Rightarrow y \in C$.
Toujours dans le cas dénombrable, on dit que C est irréductible si $\rho_{x,y} > 0 \ \forall x, y \in C$. Et on dit que E (ou que la MC est irréductible) si $\rho_{x,y} > 0 \ \forall x, y \in E$.

Prop. : Si C est fini et fermé alors $\exists y \in C$ récurrent. Si C est fini et irréductible, alors tout $y \in C$ est récurrent.

Déf.: μ mesure sur $(E, \mathcal{E})$ est invariante si $\mu P = \mu$

$$\left(\text{i.e si } \int_E \mu(dy)\, P(y, A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}\right)$$

$\exists$nce de mesures invariantes:

Th.: Si $\exists\, x$ t.q. $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$ (ρ_{xx}) alors la mesure μ_x définie par

$$\mu_x(A) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{T_x - 1} \mathbb{1}_{X_n \in A}\right] \quad \forall A \in \mathcal{E}$$

est invariante.

Obs.: si E dénombrable, alors on montre aisément que $\mu_x(\{y\}) < \infty$ $\forall y$. $\Leftrightarrow \mu_x$ σ-finie

Dans le cas général, nous avons montré que μ_x est σ-finie si x est accessible, i.e. si $\rho_{yx} > 0$ $\forall y$. Mais en réalité nous avons montré que si $\mu P = \mu$ et $\mu(\{x\}) < \infty$ alors μ est σ-finie. Pour μ_x on peut montrer que $\mu_x(\{y : \rho_{yx} = 0\}) = 0$ et ceci permet de montrer que μ_x est σ-finie sans supposer $\rho_{yx} > 0$ $\forall y$.

Unicité:

Th.: Si $\exists\, x$ t.q. $\rho_{xx} = 1$, si $\rho_{yx} > 0$ $\forall y \in E$ et si

on a $\mu P = \mu$ pour une mesure μ telle que $\mu(\{x\}) < \infty$

alors $\mu = \mu(\{x\})\, \mu_x$

Comportement asymptotique (p.s.)

Outil : décomposition en excursions de x à x (avec $\rho_{xx}=1$).

Dans ce cas on pose $T_x^0 < T_x^1 < T_x^2 < \dots$ avec $T_x^0 = 0$, $T_x^1 = T_x$.

$f \geq 0$ mesurable

$$\mathcal{E}_1(x,f) := \sum_{k=1}^{T_x} f(X_k) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m+1}(x,f) = \mathcal{E}_1(x,f) \circ \theta_{T_x^m}$$

On a que $(\mathcal{E}_m(x,f))_{m=1,2,\dots}$ est IID (si $X_0=x$) et, en utilisant la loi des grands nombres, on obtient :

Th. (ERGODIQUE p.s.) Si $\rho_{xx}=1$ et $\rho_{yx}>0$ $\forall y$ ($\exists \mu_x$) alors $\forall$ loi initiale μ telle que $\mathbb{P}_\mu(T_x<\infty)=1$ et $\forall f \geq 0$ mesurable et $\forall g \geq 0$ mesurable t.q. $\int g \, d\mu_x \in (0,\infty)$ on a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(X_k)}{\sum_{k=1}^n g(X_k)} = \frac{\int f \, d\mu_x}{\int g \, d\mu_x} \quad \mathbb{P}_\mu\text{-p.s.}$$

Cor. : $\forall C \in \mathcal{E}$ t.q. $\mu_x(C)<\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k \in C} = \frac{\mu_x(C)}{\mathbb{E}_x[T_x]} \in [0,\infty)$

Obs. : si $\mathbb{E}_x[T_x] < \infty$ (= $\mu_x(E)$) alors si on note $\nu = \frac{\mu_x}{\mu_x(E)}$ l'unique probabilité invariante on a $\boxed{\nu(\{x\}) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x]}}$. (Kac)

Prop. : si $\exists \nu$ mesure finie t.q. $\nu(\{x\})>0$ alors $\rho_{xx}=1$.

Notion de période t_x d'un état x

Obs. : si $\rho_{xx}=1$ et $\rho_{xy}>0$ (donc $\rho_{xx}=\rho_{yy}=\rho_{xy}=\rho_{yx}=1$) alors $t_x=t_y$

Aussi : si $t_x=1$ (i.e., x apériodique) alors $\exists\, n_0$ t.q. $p_n(x,\{x\})>0$ $\forall n \geq n_0$.

Distance en variation totale : μ, ν probas sur le même espace

$$d_{VT}(\mu,\nu)=\frac{1}{2}\sup_{f:\|f\|_\infty\leq 1} \int f\,d\mu-\int f\,d\nu = \sup_A \mu(A)-\nu(A)$$

Th. (ERGODIQUE) :

Hypothèses : x réc. pos. (i.e. $\mathbb{E}_x[T_x]<\infty$) et accessible (i.e. $\rho_{yx}>0\ \forall y$). x apériodique. Alors si on note ν l'unique probabilité invariante et ν_n est la loi de X_n quand $X_0\sim\lambda$ et $\lambda(\{y:\rho_{yx}=1\})=1$ alors

$$\lim_{n\to\infty} d_{VT}(\nu_n,\nu)=0.$$

MC de HARRIS sur $(E, \mathcal{E})$

Def.: X est une ρ-MC de Harris si $\exists A, B \in \mathcal{E}, \varepsilon > 0$ et ρ probabilité t.q. $\rho(B) = 1$ et

(1) A est accessible à partir de tout $x \in E$, c'est-à-dire
$$\mathbb{P}_x(T_A < \infty) > 0 \quad \forall x \quad \left(T_A := \inf\{n : X_n \in A\}\right)$$

(2) $\forall x \in A$ et $\forall C \in \mathcal{E}$ t.q. $C \subset B$ on a $p(x, C) \geq \varepsilon \rho(C)$.

Point clé: si X est de Harris on peut construire une nouvelle MC $\hat{X}$ avec un "atome" et déduire des propriétés de X à partir de $\hat{X}$.

Construction: Espace d'états $\hat{E} := E \cup \{\alpha\}$, $\hat{\mathcal{E}} := \{C, C \cup \{\alpha\} : C \in \mathcal{E}\}$

Définition de $\hat{p}$, noyau sur $\hat{E} \times \hat{\mathcal{E}}$:

si $x \in E \setminus A$, $\hat{p}(x, C) \overset{\forall C \in \mathcal{E}}{=} p(x, C) \quad (\Rightarrow p(x, \{\alpha\}) = 0)$

si $x \in A$, $\hat{p}(x, \{\alpha\}) = \varepsilon$ et $\hat{p}(x, C) = p(x, C) - \varepsilon \rho(C) \quad \forall C \in \mathcal{E}$

si $x = \alpha$, $\hat{p}(\alpha, D) = \int \rho(dy)\, \hat{p}(y, D) \quad \forall D \in \hat{\mathcal{E}}$

Outil: noyau V sur $\hat{E} \times \hat{\mathcal{E}}$: $V(x, \{x\}) = 1$ et $V(\alpha, C) \overset{\forall C \in \mathcal{E}}{=} \rho(C)$

(Donc $V(x, \{\alpha\}) = 0 \ \forall x \in \hat{E}$)

Lemme 1: $V\tilde{p} = \hat{p}$ sur $\tilde{E} \times \hat{\mathcal{E}}$

$\hat{p}V = p$ sur $E \times \mathcal{E}$

Lemme 2: si $(Y_n)_{n=0,1,2,\dots}$ est la MC inhomogène définie par $Y_{2n} \xrightarrow{V} Y_{2n+1}$ et $Y_{n+1} \xrightarrow{\hat{p}} Y_{2n}$

Alors $\forall Y_0$ à valeurs dans $\tilde{E}$ on a que

$(\tilde{X}_n)_{n=0,1,\dots}$ définie par $\tilde{X}_n := Y_{2n}$ est une $\tilde{p}$-MC

$(X_n)_{n=0,1,\dots}$ " " $X_n := Y_{2n+1}$ est une p-MC

Lemme 3. Si μ est une proba sur $(E, \mathcal{E})$ et si on définit $\tilde{\mu}$, proba sur $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$, par $\tilde{\mu}(C) = \mu(C)$ et $\tilde{\mu}(\{\alpha\}) = 0$, on a que $\mathbb{E}_\mu[f(X_n)] = \mathbb{E}_{\tilde{\mu}}[\tilde{f}(\tilde{X}_n)]$ avec $f \in \mathbb{L}^\infty(E, \mathbb{R})$

et $\tilde{f} := Vf$

i.e. $\tilde{f}(x) = \int_E V(x, dy) f(y)$ $\forall x \in \tilde{E}$

Ces Lemmes permettent de transferer les résultats de $\tilde{X}$ à X

Exemple: Si $\tilde{\pi}\tilde{p} = \tilde{\pi}$ alors si on pose $\pi := \tilde{\pi}V$

on a $\pi p = \pi$.

En fait: $\pi p = \tilde{\pi} V p \overset{\text{Lemme 1}}{=} \tilde{\pi} V \hat{p} V \overset{\text{Lemme 1}}{=} \tilde{\pi} \tilde{p} V = \tilde{\pi} V = \pi$ $\square$

Obs.: si $\tilde{\pi}$ est "unique" est si $\exists\, \pi_1 p = \pi_1$ et $\pi_2 p = \pi_2$ avec $\pi_1 \neq 0$, $\pi_2 \neq 0$ et $\frac{\pi_1}{\pi_2} \neq$ Const.

alors $\pi_1 \hat{p}$ et $\pi_2 \hat{p}$ sont $\tilde{p}$-invariantes $\Rightarrow \pi_1 \hat{p} = C \pi_2 \hat{p} \Rightarrow \pi_1 \hat{p} V = C \pi_2 \hat{p} V \overset{\text{Lemme 1}}{\Rightarrow} \pi_1 p = C \pi_2 p \Rightarrow \pi_1 = C \pi_2$ contradiction!

Il est naturel de définir récurrence et transience à partir de α si X est de type (?).

Donc X rec. si $\mathbb{P}_\alpha(\underbrace{\inf\{n \geq 1, 2, \dots : \tilde{X}_n = \alpha\}}_{=: \tilde{T}_\alpha}) =: \tilde{\rho}_{\alpha\alpha} = 1$ on dit que X est récurrente (et transiente si $\tilde{\rho}_{\alpha\alpha} < 1$)

Peut-on dire que $\mathbb{P}_x(\tilde{T}_\alpha < \infty) = 1 \ \forall x$?

Non, mais:

Prop.: Si on pose $\lambda(D) := \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2^{-n} \tilde{p}_n(\alpha, C)$ $\qquad C \in \tilde{\mathcal{E}}$

$\lambda(\tilde{E}) = 1$

et X est récurrente

alors

(1) $\lambda(C) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_\alpha(\tilde{X}_n \in C \text{ i.o.}) = 1$

(2) $\mathbb{P}_x(\tilde{T}_\alpha < \infty) = 1 \quad \lambda(dx)\text{-p.s.}$