

Notations:

(E, \mathcal{E}) Espace mesurable $p: E \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ noyau de transition

i.e. (1) $\forall x \in E, p(x, \cdot)$ est une proba

(2) $\forall A \in \mathcal{E}, p(\cdot, A)$ est mesurable

$(X_n) = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ p-PC non rapport à la filtration (\mathcal{F}_n)

si X_n mesurable \mathcal{F}_n (souvent $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$) et
 $\mathbb{P}(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = p(X_n, B) \quad \forall B \in \mathcal{E}$ est p.c.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n) \stackrel{(*)}{=} \int_{B_0} \dots \int_{B_n} \mu(dX_0) p(x_0, dx_1) p(x_1, dx_2) \dots p(x_{n-1}, dx_n)$$

avec μ loi de X_0

Obs.: (X_n) est une p-PC avec $X_0 \sim \mu$ et $(\mathcal{F}_n) = (\mathcal{F}_n^X)$ si: on a $\forall n \forall \mu$
et $\forall B_0, \dots, B_n \in \mathcal{E}$.

"Exemple" de PC: fonctions aléatoires indépendantes

$h: E \times \tilde{E} \rightarrow E$ mesurable
 $\mathcal{E} \otimes \tilde{\mathcal{E}} \quad \mathcal{E}$

$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ IID $m(\Omega, \mathcal{F}, P)$
 $\mathcal{Y}_n: \Omega \rightarrow \tilde{E}$

et X_0 v.a. $m(\Omega, \mathcal{F}, P)$
 $X_0: \Omega \rightarrow E \quad X_0 \perp\!\!\!\perp (\mathcal{Y}_n)$

alors $X_{n+1} = X_n + \mathcal{Y}_{n+1}$ forme une p-PC avec $p(x, A) = \mathbb{P}(h(x, \mathcal{Y}_1) \in A)$

Cas de E dénombrable (fini ou infini):

$Q(x, y) = p(x, \{y\})$ donc $\left. \begin{array}{l} 1. Q(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \\ 2. \sum_y Q(x, y) = 1 \quad \forall x \end{array} \right\}$ "matrice" stochastique

Espace construit: $\Omega = E^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ donc $\omega \in \Omega$ est une suite: $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$
 $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N} \cup \{0\}} = \sigma(\{\omega: \omega_i \in B_i, \dots, \omega_n \in B_n\}, B_i \in \mathcal{E}, i=0,1,2,\dots)$

$(\Theta_n \omega)_i = \omega_{i+n}$ (donc $\Theta_n: \Omega \rightarrow \Omega$)

Notation: si $x_0 = \mu$ alors on met μ dans la notation, i.e. $\mathbb{P}_\mu(x_0 \in B) = \mu(B)$
 si $\mu = \delta_k$ (i.e. $x_0 = k$) on note \mathbb{P}_k à la place de \mathbb{P}_{δ_k} .

Propriété de Markov Simple: $\omega(x_n)$ est une p-kc, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X$, (Ω, \mathcal{F}) complète
 alors \mathcal{Y} bonifiée mesurable et τ_n

$$\mathbb{E}[Y \circ \Theta_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[Y]$$

Remarque: $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ temps d'arrêt tel $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et n
 si T est temps d'arrêt, $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

Propriété de Markov forte: T temps d'arrêt, \mathcal{Y} bonifiée mesurable

$$\text{alors } \mathbb{E}[Y \circ \Theta_T | \mathcal{F}_T] \mathbb{1}_{T < \infty} = \mathbb{E}_{X_T}[Y] \mathbb{1}_{T < \infty}$$

Corollaire: si T est temps d'arrêt t.g. $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ et il existe $y \in E$ t.g.

$\mathbb{P}(X_T = y) = 1$ alors pour tout \mathbb{P} on a que

$\Theta_T \perp \mathcal{F}_T$ et la loi de Θ_T est \mathbb{P}_y .

$y \in E$: $T_y^0 := 0$ et $T_y^k = \inf\{n > T_y^{k-1} : X_n = y\}$ "Temps de k -ième visite en y "

Notation: $f_{xy} = P_x(T_y < \infty)$ $T_y := T_y^1$

Théorème: $P_x(T_y^k < \infty) = f_{xy} f_{yy}^{k-1}$

Def: z récurrent si $f_{zz} = 1$ et z transitoire si $f_{zz} < 1$.

On introduit $N(y) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{X_i = y}$

\Rightarrow si y est récurrent on a $P_y(T_y^1 < \infty) = f_{yy} = 1 \Rightarrow P_y(T_y^k < \infty \forall k) = 1$
 $\Rightarrow P_y(N(y) = \infty) = 1$

Si y est transitoire $\Rightarrow N(y) \stackrel{P_y}{\sim} \text{Geom}(1 - f_{yy})$ i.e. $P_y(T_y^k < \infty) = 1 - f_{yy}^k$
 $P_y(N(y) \geq k) = f_{yy}^k$

et $E_x[N(y)] = \frac{f_{xy}}{1 - f_{yy}} \in [0, \infty)$

Donc y récurrent ssi: $E_y[N(y)] < \infty$.

Théorème: si $f_{xx} = 1$ et $f_{xy} > 0$ alors $f_{yy} = f_{yx} = 1$ (donc $f_{yy} = 1$).

Def: $C \subseteq E$ est fermé si $\forall x \in C$ on a $P_x(X_n \in C) = 1 \forall n$.

Si E est dénombrable alors C est fermé ssi: $x \in C$ et $f_{xy} > 0 \Rightarrow y \in C$.

Toujours dans le cas dénombrable, on dit que C est irréductible si $f_{xy} > 0 \forall x, y \in C$. Et on dit que E (ou que la MC est irréductible)

si $f_{xy} > 0 \forall x, y \in E$.

Prop.: Si C est fini et fermé alors $\exists y \in C$ récurrent. Si C est fini et irréductible, alors tout $y \in C$ est récurrent.

Déf.: μ mesure sur (E, \mathcal{E}) est invariante si $\mu p = \mu$

$$\text{(i.e. si } \int_E \mu(dy) p(y, A) = \mu(A) \text{ } \forall A \in \mathcal{E})$$

Frac de mesures invariantes:

Th.: Si $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathbb{P}_n(T_n < \infty) = 1$ alors la mesure μ_n définie par

$$\mu_n(A) := \mathbb{E}_n \left[\sum_{k=0}^{T_n-1} 1_{X_k \in A} \right] \quad \forall A \in \mathcal{E}$$

est invariante.

Obs.: si E dénombrable, alors on montre aisément que $\mu_n(\{x\}) < \infty \forall x$.
 $\Rightarrow \mu_n$ σ -finie

Dans le cas général, nous avons montré que μ_x est σ -finie si x est accessible, i.e. si $f_y > 0 \forall y$. Mais en réalité nous avons montré que si $\mu p = \mu$ et $\mu(\{x\}) < \infty$ alors μ est σ -finie. Pour μ_n on peut montrer que $\mu_n(\{y : f_y = 0\}) = 0$ et ceci permet de montrer que μ_n est σ -finie sans supposer $f_y > 0 \forall y$.

Unité:

Th.: Si $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathbb{P}_n = 1$, si $f_y > 0 \forall y \in E$ et si

on a $\mu p = \mu$ pour une mesure μ telle que $\mu(\{x\}) < \infty$

alors $\mu = \mu(\{x\}) \mu_n$

Comportement asymptotique (P.S.)

Outil: décomposition en excursions de n à n (avec $\beta_n = 1$).

Dans ce cas on pose $T_n^0 < T_n^1 < T_n^2 < \dots$

$$f \geq 0 \text{ mesurable} \quad \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ T_n \end{matrix}$$

$$\sum_{k=1}^{T_n} f(X_k) \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{T_n} f) \circ \theta_{T_n^m}$$

On a que $(\sum_{k=1}^{T_n} f)_{n=1,2,\dots}$ est IID et, en utilisant la loi des grands nombres, on obtient:

Th. (ERGODIQUES P.S.) si $\beta_n = 1$ et $\beta_n > 0 \forall n$ alors \forall loi initiale μ

telle que $\mathbb{P}_\mu(T_n < \infty) = 1$ et $\forall f \geq 0$ mesurable et $\forall g \geq 0$

mesurable t.g. $\int g d\mu < \infty$ on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(X_k)}{\sum_{k=1}^n g(X_k)} = \frac{\int f d\mu}{\int g d\mu} \quad \mathbb{P}_\mu\text{-P.S.}$$

Cor.: $\forall C \in \mathcal{C}$ t.g.

$$\mu_n(C) < \infty \text{ ou } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k \in C} = \frac{\mu_n(C)}{\mu_n[T_n]} \in [0, \infty)$$

Obs.: si $\mu_n[T_n] < \infty$ alors si on note $\nu = \frac{\mu_n}{\mu_n(B)}$ l'unique probabilité invariante

on a $\nu(d\lambda) = \frac{1}{\mu_n[T_n]}$ (Kac)

Prop.: si $\exists \nu$ mesure finie t.g. $\nu(d\lambda) > 0$ alors $\beta_n = 1$.

Notion de période t_n d'un état x

Obs.: si $p_{xx} = 1$ et $f_{xy} > 0$ (soit $p_{xx} = f_{yy} = f_{yx} = 1$) alors $t_n = t_y$

Aussi: si $t_n = 1$ (i.e. x aperiodique) alors $\exists M_0$ t.q. $p_n(x, x) > 0 \forall n > M_0$.

Distance en variation totale: μ, ν probas sur le même espace

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sup_{f: \|f\|_\infty \leq 1} \int f d\mu - \int f d\nu = \sup_A \mu(A) - \nu(A)$$

Th. (ERGONOME):

Hypothèses: n réc. fin. (i.e. $\mathbb{E}_n[T_n] < \infty$) et accessible (i.e. $f_{yx} > 0 \forall y$).
 n a période - Alors il on note ν l'unique
probabilité invariante et ν_n est la loi de X_n quand
 $X_0 \sim \lambda$ et $\lambda(\{y: f_{yx} = 1\}) = 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{VT}(\nu_n, \nu) = 0.$$