Notations:

$(E, \mathcal{E})$ Espace mesurable $\qquad p : E \times \mathcal{E} \to [0,1]$ noyau de transition

i.e. (1) $\forall x \in E$, $p(x, \cdot)$ est une proba
(2) $\forall A \in \mathcal{E}$, $p(\cdot, A)$ est mesurable

$(X_n) = (X_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ $\quad p$-MC par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$

si X_n mesurable $\mathcal{F}_n$ (souvent $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$) et
$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B \mid \mathcal{F}_n) = p(X_n, B) \quad \forall B \in \mathcal{E}$ et $\forall n$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n) \overset{(*)}{=} \int_{B_0} \dots \int_{B_n} \mu(dx_0)\, p(x_0, dx_1)\, p(x_1, dx_2) \dots p(x_{n-1}, dx_n)$$
avec μ loi de X_0

Obs.: (X_n) est une p-MC avec $X_0 \sim \mu$ et $(\mathcal{F}_n) = (\mathcal{F}_n^X)$ ssi on a $(*)$ $\forall n$
et $\forall B_0, \dots, B_n \in \mathcal{E}$.

"Exemple" de MC: fonctions aléatoires itérées

$h : E \times \tilde{E} \to E$ mesurable
$\mathcal{E} \otimes \tilde{\mathcal{E}} \quad \mathcal{E}$

$(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ IID sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\xi_n : \Omega \to \tilde{E}$
et X_0 v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$X_0 : \Omega \to E \qquad X_0 \perp\!\!\!\perp (\xi_n)$

alors $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$ forme une p-MC avec $p(x, A) = \mathbb{P}(h(x, \xi_1) \in A)$
$\hat{\xi}$

Cas de E dénombrable (fini ou infini):

$Q(x,y) = p(x, \{y\})$ $\quad$ donc $\left.\begin{array}{l} 1.\ Q(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \\ 2.\ \sum_y Q(x,y) = 1 \quad \forall x \end{array}\right\}$ "matrice" stochastique

Espace canonique: $\Omega = E^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$ donc $\omega \in \Omega$ est une suite: $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$

$\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}\cup\{0\}} = \sigma\left(\{\omega : \omega_1 \in B_1, \dots, \omega_n \in B_n\},\ B_i \in \mathcal{E},\ n = 0,1,2,\dots\right)$

$(\theta_m \omega)_n = \omega_{n+m}$ (donc $\theta_m : \Omega \to \Omega$)

Notation: si $X_0 \sim \mu$ alors on met μ dans le notation, i.e. $\mathbb{P}_\mu(X_0 \in B) = \mu(B)$

si $\mu = \delta_k$ (i.e. $X_0 \overset{p.s.}{=} k$) on note $\mathbb{P}_k$ à la place de $\mathbb{P}_{\delta_k}$.

Propriété de Markov Simple: si (X_n) est une p-MC, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X$, $(\Omega, \mathcal{F})$ canonique

alors $\forall$ Y bornée mesurable et $\forall n$

$$\mathbb{E}[Y \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[Y]$$

Rappel: $T : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{\infty\}$ temps d'arrêt si $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$ $\forall n$

Si T est temps d'arrêt, $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

Propriété de Markov forte: T temps d'arrêt, Y bornée mesurable

alors $\mathbb{E}[Y \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T] \mathbb{1}_{T<\infty} = \mathbb{E}_{X_T}[Y] \mathbb{1}_{T<\infty}$

Corollaire: si T est temps d'arrêt t.q. $\mathbb{P}(T<\infty) = 1$ et il existe $y \in E$ t.q.

$\mathbb{P}(X_T = y) = 1$ alors sous $\mathbb{P}$ on a que

$\theta_T \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T$ et la loi de θ_T est $\mathbb{P}_y$.

$y \in E$: $T_y^0 := 0$ et $T_y^k \overset{k\geq 1}{=} \inf\{n > T_y^{k-1} : X_n = y\}$ "Temps de k-ième visite en y"

Notation : $\rho_{x,y} = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$ $T_y := T_y^1$

Théorème : $\mathbb{P}_x(T_y^k < \infty) = \rho_{xy}\rho_{yy}^{k-1}$

Déf. : x récurrent si $\rho_{xx} = 1$ et x transitoire si $\rho_{xx} < 1$.

On introduit $N(y) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = y}$

$\Rightarrow$ si y est récurrent on a $\mathbb{P}_y(T_y^1 < \infty) = \rho_{yy} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}_y(T_y^k < \infty\ \forall k) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}_y(N(y) = \infty) = 1$

Si y est transitoire $\Rightarrow N(y) \overset{\mathbb{P}_y}{\sim} \mathrm{Geom}(1-\rho_{yy})$ i.e. $\mathbb{P}_y(T_y^k < \infty)$

"$\mathbb{P}_y(N(y) \geq k) = \rho_{yy}^k$"

et $\mathbb{E}_x[N(y)] = \dfrac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} \in [0, \infty)$

Donc y récurrent ssi $\mathbb{E}_y[N(y)] < \infty$.

Théorème : si $\rho_{xx} = 1$ et $\rho_{xy} > 0$ alors $\rho_{yy} = \rho_{yx} = 1$ (donc $\rho_{xy} = 1$).

Déf : $C \in \mathcal{E}$ est fermé si $\forall x \in C$ on a $\mathbb{P}_x(X_n \in C) = 1\ \forall n$.

Si E est dénombrable alors C est fermé ssi $x \in C$ et $\rho_{xy} > 0 \Rightarrow y \in C$.

Toujours dans le cas dénombrable, on dit que C est irréductible si $\rho_{x,y} > 0\ \forall x, y \in C$. Et on dit que E (ou que la MC est irréductible) si $\rho_{x,y} > 0\ \forall x, y \in E$.

Prop. : Si C est fini et fermé alors $\exists y \in C$ récurrent. Si C est fini et irréductible, alors tout $y \in C$ est récurrent.

Déf : μ mesure sur $(E, \mathcal{E})$ est invariante si $\mu P = \mu$

(i.e si $\int_E \mu(dy) P(y, A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}$)

$\exists$nce de mesures invariantes :

ρ_{xx} ..

Th : Si $\exists\, x$ t.q. $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$ alors la mesure μ_x définie par

$$\mu_x(A) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{T_x - 1} \mathbb{1}_{X_n \in A}\right] \quad \forall A \in \mathcal{E}$$

est invariante.

Obs : si E dénombrable, alors on montre aisément que $\mu_x(\{y\}) < \infty \ \forall y$.
$\Leftrightarrow \mu_x$ σ-finie

Dans le cas général, nous avons montré que μ_x est σ-finie si x est accessible, i.e. si $\rho_{yx} > 0 \ \forall y$. Mais en réalité nous avons montré que si $\mu P = \mu$ et $\mu(\{x\}) < \infty$ alors μ est σ-finie. Pour μ_x on peut montrer que $\mu_x(\{y : \rho_{yx} = 0\}) = 0$ et ceci permet de montrer que μ_x est σ-finie sans supposer $\rho_{yx} > 0 \ \forall y$.

Unicité :

Th : Si $\exists\, x$ t.q. $\rho_{xx} = 1$, si $\rho_{yx} > 0 \ \forall y \in E$ et si

on a $\mu P = \mu$ pour une mesure μ telle que $\mu(\{x\}) < \infty$

alors $\mu = \mu(\{x\})\, \mu_x$

Comportement asymptotique (p.s.)

Outil : décomposition en excursions de x à x (avec $\rho_{xx}=1$).

Dans ce cas on pose $T_x^0 < T_x^1 < T_x^2 < \dots$ avec $T_x^0 = 0$, $T_x^1 = T_x$.

$f \geq 0$ mesurable

$$\mathcal{E}_1(x,f) := \sum_{k=1}^{T_x} f(X_k) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m+1}(x,f) = \mathcal{E}_1(x,f)\circ\theta_{T_x^m}$$

On a que $(\mathcal{E}_m(x,f))_{m=1,2,\dots}$ est IID (si $X_0=x$) et, en utilisant la loi des grands nombres, on obtient :

Th. (ERGODIQUE p.s.) Si $\rho_{xx}=1$ et $\rho_{yx}>0$ $\forall y$ ($\Rightarrow \exists \mu_x$) alors $\forall$ loi initiale μ telle que $\mathbb{P}_\mu(T_x<\infty)=1$ et $\forall f\geq 0$ mesurable et $\forall g \geq 0$ mesurable t.q. $\int g\,d\mu_x \in (0,\infty)$ on a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=1}^{n} g(X_k)} = \frac{\int f\,d\mu_x}{\int g\,d\mu_x} \quad \mathbb{P}_\mu\text{-p.s.}$$

Cor. : $\forall C \in \mathcal{E}$ t.q. $\mu_x(C)<\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k\in C} = \frac{\mu_x(C)}{\mathbb{E}_x[T_x]} \in [0,\infty)$

Obs. : si $\mathbb{E}_x[T_x] < \infty$ (" $= \mu_x(E)$ ") alors si on note $\nu = \frac{\mu_x}{\mu_x(E)}$ l'unique probabilité invariante

on a $\boxed{\nu(\{x\}) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x]}}$. (Kac)