Notations:

$(E,\mathcal{E})$ Espace mesurable $\qquad p: E\times\mathcal{E}\to[0,1]$ noyau de transition

i.e. (1) $\forall x\in E$, $p(x,\cdot)$ est une proba
(2) $\forall A\in\mathcal{E}$, $p(\cdot,A)$ est mesurable

$(X_n)=(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ p-MC par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$

si X_n mesurable $\mathcal{F}_n$ (souvent $\mathcal{F}_n=\mathcal{F}_n^X=\sigma(X_0,\dots,X_n)$) et
$\mathbb{P}(X_{n+1}\in B|\mathcal{F}_n)=p(X_n,B)$ $\forall B\in\mathcal{E}$ et $\forall n$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_0\in B_0,\dots,X_n\in B_n)\overset{(*)}{=}\int_{B_0}\cdots\int_{B_n}\mu(dx_0)\,p(x_0,dx_1)\,p(x_1,dx_2)\cdots p(x_{n-1},dx_n)$$

avec μ loi de X_0

Obs.: (X_n) est une p-MC avec $X_0\sim\mu$ et $(\mathcal{F}_n)=(\mathcal{F}_n^X)$ ssi on a $(*)$ $\forall n$ et $\forall B_0,\dots,B_n\in\mathcal{E}$.

"Exemple" de MC: fonctions aléatoires itérées

$h: E\times\tilde{E}\to E$ mesurable $\qquad (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ IID sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$
$\quad\mathcal{E}\otimes\tilde{\mathcal{E}}\quad\mathcal{E}$

$\xi_n:\Omega\to\tilde{E}$

et X_0 v.a. sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$
$X_0:\Omega\to E \qquad X_0\perp\!\!\!\perp(\xi_n)$

alors $X_{n+1}=X_n+\xi_{n+1}$ forme une p-MC avec $p(\underset{\in\mathcal{E}}{x,A})=\mathbb{P}(h(x,\xi_1)\in A)$

Cas de E dénombrable (fini ou infini):

$Q(x,y)=p(x,\{y\})$ donc 1. $Q(x,y)\geq 0$ $\forall x,y$
2. $\sum_y Q(x,y)=1$ $\forall x$

"matrice" stochastique

Espace canonique: $\Omega = E^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$ donc $\omega \in \Omega$ est une suite: $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$

$\mathcal{G} = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}\cup\{0\}} = \sigma\left(\{\omega : \omega_1 \in B_1, \dots, \omega_n \in B_n\}, B_i \in \mathcal{E}, n = 0,1,2,\dots\right)$

$(\theta_m \omega)_n = \omega_{n+m}$ (donc $\theta_m : \Omega \to \Omega$)

Notation: si $X_0 \sim \mu$ alors on met μ dans le notation, i.e. $\mathbb{P}_\mu(X_0 \in B) = \mu(B)$

si $\mu = \delta_k$ (i.e. $X_0 \overset{p.s.}{=} k$) on note $\mathbb{P}_k$ à la place de $\mathbb{P}_{\delta_k}$.

Propriété de Markov Simple: si (X_n) est une p-MC, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X$, $(\Omega, \mathcal{G})$ canonique

alors $\forall$ Y bornée mesurable et $\forall n$

$$\mathbb{E}[Y \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[Y]$$

Rappel: $T : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{\infty\}$ temps d'arrêt si $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$ $\forall n$

Si T est temps d'arrêt, $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{G} : A \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

Propriété de Markov forte: T temps d'arrêt, Y bornée mesurable

alors $\mathbb{E}[Y \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T] \mathbb{1}_{T<\infty} = \mathbb{E}_{X_T}[Y] \mathbb{1}_{T<\infty}$

Corollaire: si T est temps d'arrêt t.q. $\mathbb{P}(T<\infty) = 1$ et il existe $y \in E$ t.q.

$\mathbb{P}(X_T = y) = 1$ alors sous $\mathbb{P}$ on a que

$\theta_T \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T$ et la loi de θ_T est $\mathbb{P}_y$.

$y \in E$: $T_y^0 := 0$ et $T_y^k \overset{k\geq 1}{=} \inf\{n > T_y^{k-1} : X_n = y\}$ "Temps de k-ième visite en y"

Notation: $\rho_{x,y} = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$ $T_y := T_y^1$

Théorème: $\mathbb{P}_x(T_y^k < \infty) = \rho_{xy}\, \rho_{yy}^{k-1}$

Déf.: x récurrent si $\rho_{xx} = 1$ et x transitoire si $\rho_{xx} < 1$.

On introduit $N(y) = \sum_{i\geq 1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = y}$

$\Rightarrow$ si y est récurrent on a $\mathbb{P}_y(T_y^1 < \infty) = \rho_{yy} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}_y(T_y^k < \infty \ \forall k) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}_y(N(y) = \infty) = 1$

Si y est transitoire $\Rightarrow N(y) \overset{\mathbb{P}_y}{\sim} \mathrm{Geom}(1-\rho_{yy})$ i.e. $\mathbb{P}_y(T_y^k < \infty)$

"$\mathbb{P}_y(N(y) \geq k) = \rho_{yy}^k$"

et $\mathbb{E}_x[N(y)] = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} \in [0, \infty)$

Donc y récurrent ssi $\mathbb{E}_y[N(y)] < \infty$.

Théorème: si $\rho_{xx} = 1$ et $\rho_{xy} > 0$ alors $\rho_{yy} = \rho_{yx} = 1$ (donc $\rho_{xy} = 1$).

Déf: $C \in \mathcal{E}$ est fermé si $\forall x \in C$ on a $\mathbb{P}_x(X_n \in C) = 1 \ \forall n$.

Si E est dénombrable alors C est fermé ssi $x \in C$ et $\rho_{xy} > 0 \Rightarrow y \in C$.
Toujours dans le cas dénombrable, on dit que C est irréductible si $\rho_{x,y} > 0 \ \forall x, y \in C$. Et on dit que E (ou que la MC est irréductible)

si $\rho_{x,y} > 0 \ \forall x, y \in E$.

Prop.: Si C est fini et fermé alors $\exists y \in C$ récurrent. Si C est fini et irréductible, alors tout $y \in C$ est récurrent.

Déf : μ mesure sur $(E, \mathcal{E})$ est invariante si $\mu P = \mu$

(i.e si $\int_E \mu(dy) P(y, A) = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{E}$)

$\exists$nce de mesures invariantes :

Th. : Si $\exists x$ t.q. $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$ (sauf f_{xx}..) alors la mesure μ_x définie par

$$\mu_x(A) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{T_x - 1} \mathbb{1}_{X_n \in A}\right] \quad \forall A \in \mathcal{E}$$

est invariante.

Obs. : si E dénombrable, alors on montre directement que $\mu_x(\{y\}) < \infty$ $\forall y$.
$\Leftrightarrow \mu_x$ σ-finie

Dans le cas général, nous avons montré que μ_x est σ-finie si x est accessible, i.e. si $f_{yx} > 0$ $\forall y$. Mais en réalité nous avons montré que si $\mu P = \mu$ et $\mu(\{x\}) < \infty$ alors μ est σ-finie. Pour μ_x on peut montrer que $\mu_x(\{y : f_{yx} = 0\}) = 0$ et ceci permet de montrer que μ_x est σ-finie sans supposer $f_{yx} > 0$ $\forall y$.

Unicité :

Th. : Si $\exists x$ t.q. $f_{xx} = 1$, si $f_{yx} > 0$ $\forall y \in E$ et si

on a $\mu P = \mu$ pour une mesure μ telle que $\mu(\{x\}) < \infty$

alors $\mu = \mu(\{x\}) \mu_x$

Comportement asymptotique (p.s.)

Outil : décomposition en excursions de x à x (avec $\rho_{xx}=1$).

Dans ce cas on pose $T_x^0 < T_x^1 < T_x^2 < \dots$ avec $T_x^0 = 0$, $T_x^1 = T_x$.

$f \geq 0$ mesurable

$$\mathcal{E}_1(x,f) := \sum_{k=1}^{T_x} f(X_k) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m+1}(x,f) = \mathcal{E}_1(x,f)\circ\theta_{T_x^m}$$

On a que $(\mathcal{E}_m(x,f))_{m=1,2,\dots}$ est IID (si $X_0=x$) et, en utilisant la loi des grands nombres, on obtient :

Th. (ERGODIQUE p.s.) Si $\rho_{xx}=1$ et $\rho_{yx}>0$ $\forall y$ ($\Rightarrow \exists \mu_x$) alors $\forall$ loi initiale μ telle que $\mathbb{P}_\mu(T_x<\infty)=1$ et $\forall f \geq 0$ mesurable et $\forall g \geq 0$ mesurable t.q. $\int g\, d\mu_x \in (0,\infty)$ on a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(X_k)}{\sum_{k=1}^n g(X_k)} = \frac{\int f\, d\mu_x}{\int g\, d\mu_x} \quad \mathbb{P}_\mu\text{-p.s.}$$

Cor. : $\forall C \in \mathcal{E}$ t.q. $\mu_x(C)<\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k\in C} = \frac{\mu_x(C)}{\mathbb{E}_x[T_x]} \in [0,\infty)$

Obs. : Si $\mathbb{E}_x[T_x] < \infty$ (= $\mu_x(E)$) alors si on note $\nu = \frac{\mu_x}{\mu_x(E)}$ l'unique probabilité invariante on a $\boxed{\nu(\{x\}) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x]}}$. (Kac)

Prop. : Si $\exists \nu$ mesure finie t.q. $\nu(\{x\})>0$ alors $\rho_{xx}=1$.

Notion de période t_x d'un état x

Obs. : si $\rho_{xx}=1$ et $\rho_{xy}>0$ (donc $\rho_{xx}=\rho_{yy}=\rho_{xy}=\rho_{yx}=1$) alors $t_x=t_y$

Aussi : si $t_x=1$ (i.e., x apériodique) alors $\exists\, n_0$ t.q. $p_n(x,\{x\})>0$ $\forall n\geq n_0$.

Distance en variation totale : μ, ν probas sur le même espace

$$d_{VT}(\mu,\nu)=\frac{1}{2}\sup_{f:\|f\|_\infty\leq 1}\int f\,d\mu-\int f\,d\nu=\sup_A \mu(A)-\nu(A)$$

Th. (ERGODIQUE) :

Hypothèses : x réc. posi (i.e. $\mathbb{E}_x[T_x]<\infty$) et accessible (i.e. $\rho_{yx}>0\ \forall y$). x apériodique. Alors si on note ν l'unique probabilité invariante et ν_n est la loi de X_n quand $X_0\sim\lambda$ et $\lambda(\{y:\rho_{yx}=1\})=1$ alors

$$\lim_{n\to\infty} d_{VT}(\nu_n,\nu)=0.$$

MC de HARRIS sur $(E, \mathcal{E})$

Déf.: X est une ρ-MC de Harris si $\exists A, B \in \mathcal{E}, \varepsilon > 0$ et ρ probabilité t.q. $\rho(B) = 1$ et

(1) A est accessible à partir de tout $x \in E$, c'est-à-dire
$$\mathbb{P}_x(T_A < \infty) > 0 \quad \forall x \quad \left(T_A := \inf\{n : X_n \in A\}\right)$$

(2) $\forall x \in A$ et $\forall C \in \mathcal{E}$ t.q. $C \subset B$ on a $p(x, C) \geq \varepsilon \rho(C)$.

Point clé : si X est de Harris on peut construire une nouvelle MC $\hat{X}$ avec un "atome" et déduire des propriétés de X à partir de $\hat{X}$.

Construction : Etape d'état $\hat{E} := E \cup \{\alpha\}$, $\hat{\mathcal{E}} := \{C, C \cup \{\alpha\} : C \in \mathcal{E}\}$

Définition de $\hat{p}$, noyau sur $\hat{E} \times \hat{\mathcal{E}}$:

si $x \in E \setminus A$, $\hat{p}(x, C) \overset{\forall C \in \mathcal{E}}{=} p(x, C) \quad (\Rightarrow p(x, \{\alpha\}) = 0)$

si $x \in A$, $\hat{p}(x, \{\alpha\}) = \varepsilon$ et $\hat{p}(x, C) = p(x, C) - \varepsilon \rho(C) \quad \forall C \in \mathcal{E}$

si $x = \alpha$, $\hat{p}(\alpha, D) = \int \rho(dy)\, \hat{p}(y, D) \quad \forall D \in \hat{\mathcal{E}}$

Outil : noyau V sur $\hat{E} \times \hat{\mathcal{E}}$: $V(x, \{x\}) = 1$ et $V(\alpha, C) \overset{\forall C \in \mathcal{E}}{=} \rho(C)$

(Donc $V(x, \{\alpha\}) = 0 \ \forall x \in \hat{E}$)

Lemme 1: $V\tilde{p} = \hat{p}$ sur $\tilde{E} \times \hat{\tilde{\mathcal{E}}}$

$\hat{p}\, V = p$ sur $E \times \mathcal{E}$

Lemme 2: si $(Y_n)_{n=0,1,2,\dots}$ est la MC inhomogène définie par $Y_{2n} \xrightarrow{V} Y_{2n+1}$ et $Y_{n+1} \xrightarrow{\hat{p}} Y_{2n}$

Alors $\forall\, Y_0$ à valeurs dans $\tilde{E}$ on a que

$(\tilde{X}_n)_{n=0,1,\dots}$ définie par $\tilde{X}_n := Y_{2n}$ est une $\tilde{p}$-MC

$(X_n)_{n=0,1,\dots}$ " " $X_n := Y_{2n+1}$ est une p-MC

Lemme 3. Si μ est une proba sur $(E, \mathcal{E})$ et si on définit $\tilde{\mu}$, proba sur $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$, par $\tilde{\mu}(C) = \mu(C)$ et $\tilde{\mu}(\{\partial\}) = 0$, on a que $\mathbb{E}_\mu[f(X_n)] = \mathbb{E}_{\tilde{\mu}}[\tilde{f}(\tilde{X}_n)]$ avec $f \in \mathbb{L}^\infty(E, \mathbb{R})$

et $\tilde{f} := Vf$

i.e. $\tilde{f}(x) = \int_E V(x, dy) f(y)$ $\forall x \in \tilde{E}$

Ces Lemmes permettent de transférer les résultats de $\tilde{X}$ à X

Exemple: Si $\tilde{\pi}\tilde{p} = \tilde{\pi}$ alors si on pose $\pi := \tilde{\pi} V$

on a $\pi p = \pi$.

En fait: $\pi p = \tilde{\pi} V p \overset{\text{Lemme 1}}{=} \tilde{\pi} V \hat{p} V \overset{\text{Lemme 1}}{=} \tilde{\pi} \tilde{p} V = \tilde{\pi} V = \pi$ $\square$

Obs.: si $\tilde{\pi}$ est "unique" est si $\exists\ \pi_1 p = \pi_1$ et $\pi_2 p = \pi_2$ avec $\pi_1 \neq 0$, $\pi_2 \neq 0$ et $\frac{\pi_1}{\pi_2} \neq$ Const.
alors $\pi_1 \hat{p}$ et $\pi_2 \hat{p}$ sont $\tilde{p}$-invariantes $\Rightarrow \pi_1 \hat{p} = C \pi_2 \hat{p} \Rightarrow \pi_1 \hat{p} V = C \pi_2 \hat{p} V \overset{\text{Lemme 1}}{\Rightarrow} \pi_1 p = C \pi_2 p \Rightarrow \pi_1 = C \pi_2$ contradiction!

Il est naturel de définir récurrence et transience à partir de α si X est de Harris.

Donc X rec. si $\mathbb{P}_\alpha(\underbrace{\inf\{n \geq 1, 2, \ldots : \tilde{X}_n = \alpha\}}_{=:\tilde{T}_\alpha}) =: \tilde{\rho}_{\alpha\alpha} = 1$ on dit que X est récurrente (et transiente si $\tilde{\rho}_{\alpha\alpha} < 1$)

Peut-on dire que $\mathbb{P}_x(\tilde{T}_\alpha < \infty) = 1 \ \forall x$?

Non, mais:

Prop.: Si on pose $\lambda(D) := \sum_{n\geq 1}^{\infty} 2^{-n} \tilde{p}_n(\alpha, C)$ $\quad C \in \tilde{\mathcal{E}}$ $\quad \lambda(\tilde{E}) = 1$

pas fait en cours, mais utile quand même

Obs.: $\lambda(\cdot) = \tilde{p}_*(\alpha, \cdot)$

et X est récurrente alors

(1) $\lambda(C) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_\alpha(\tilde{X}_n \in C \ i.o.) = 1$

(2) $\mathbb{P}_x(T_\alpha < \infty) = 1 \quad \lambda(dx)$-p.s.

Dém.: (1) si $\lambda(C) > 0$ on a que $\mathbb{P}_\alpha(\exists i \in \{0, \ldots, T_\alpha - 1\} \text{ t.q. } X_i \in C) =: p > 0$ car sinon $\mathbb{P}_\alpha(X_i \notin C \ \forall i) = 1$ et ceci implique $\lambda(C) = 0$. Par indépendance des excursions on obtient aisément que $\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} \mathbb{1}_{\{\exists m \in \{T_\alpha^{(j)}, T_\alpha^{(j)}+1, \ldots, T_\alpha^{(j+1)}-1\} \text{ t.q. } \tilde{X}_m \in C\}} \xrightarrow{p.s.} p > 0$. Ceci implique $\sum_n \mathbb{1}_{\tilde{X}_n \in C} = \infty$ p.s. $\square$

(2) $1 = \mathbb{P}_\alpha(\tilde{X}_n = \alpha \ i.o.) = \int_{\tilde{E}} \tilde{p}_n(\alpha, dx) \mathbb{P}_x(\tilde{X}_n = \alpha \ i.o.)$
$\leq \int_{\tilde{E}} \tilde{p}_n(\alpha, dx) \mathbb{P}_x(T_\alpha < \infty)$

$\Rightarrow 1 \leq \int_{\tilde{E}} \lambda(dx) \underbrace{\mathbb{P}_x(T_\alpha < \infty)}_{\leq 1} \Rightarrow \mathbb{P}_x(T_\alpha < \infty) = 1 \quad \lambda(dx)$-p.s. $\square$

E métrique ($\mathcal{E}$ boréliens)

Déf.: p est Feller si $pf \in C_b^0$ $\forall f \in C_b^0$

Exemple: $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$, avec (ξ_n) IID. Alors $f(\cdot, \xi) \in C^0$ $\mathbb{P}_\xi$-p.s. implique que p est Feller.

μ proba sur $(E, \mathcal{E})$: $\Pi_n^{\mu} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mu p_j$ (Notation: $p_j = p^j$)

proba

Formule élémentaire mais cruciale: $\Pi_n^\mu p - \Pi_n^\mu = \frac{1}{n}(\mu p_n - \mu)$

Donc $|\Pi_n^\mu p h - \Pi_n^\mu h| \leq \frac{2}{n} \|h\|_\infty$

Prop.: Si p est Feller et $\exists (n_j)$ t.q. $\Pi_{n_j}^\mu \xrightarrow{\mathcal{L}} \Pi$, alors $\Pi p = \Pi$.

Obs.1 si $\underset{\text{proba}}{\nu_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \nu$ alors ν est une proba.

Obs.2: en général on ne peut pas extraire d'une suite de probas une sous-suite convergente! Ceci est possible si et seulement si (Th. de Prohorov ou Lemme de Helly-Bray) la suite est tendue.
Une suite (ν_n) de probabilités sur $(E, \mathcal{E})$ est tendue si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K$ compacte tel que $\inf_n \nu_n(K) \geq 1 - \varepsilon$.

Prop.: p Feller et $\exists V: E \to [0, \infty]$ et $x_0 \in E$ t.q. $V(x_0) < \infty$, $f: E \to [0, \infty)$ mesurable telle que $\{x : f(x) \leq c\}$ est compacte $\forall c$, et $b > 0$ t.q.

$$pV + f \leq V + b.$$

Alors $\exists$ une probabilité invariante ν et $\nu f \leq V(x_0) + b$.

Déf.: (convergence $*$-faible pour mesures finies): (μ_n) mesures finies

$*\text{-}\lim_n \mu_n = \mu$ si $\mu_n h \to \mu h$ $\forall h \in C_c^0$

$C_c^0 := \{h : E \to \mathbb{R}$ t.q. $\exists K$ compact et $f(x) = 0$ si $x \notin K\}$

Exemple: $n\delta_n \xrightarrow{*} \mu \equiv 0$

Obs.: sous l'hypothèse que E soit localement compact, on a que $\forall (\mu_i)$, μ_i mesure finie, si $\sup_i \mu_i(E) < \infty$ alors $\exists (n_i)$ t.q. $\exists \, {}^*\!\lim_{i\to\infty}$

mais μ pourrait être la mesure nulle.

En fait, on a que si $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, alors $\liminf \mu_n h \geq \mu h$ si $h \in C_b^0$

D'autre part $\limsup_n \mu_n(K) \leq \mu(K)$ si K est compact.

Complément important : partie pas faite en cours

Obs: alors si μ est une proba, $\exists (n_i)$ t.q. $\Pi^{\mu}_{n_i} \xrightarrow[*]{i\to\infty} \Pi$ (et $\Pi(E) \leq 1$).

En fait : $\Pi p = \Pi$ et donc si $\Pi(E) > 0$ on peut poser $\nu = \frac{\Pi}{\Pi(E)}$

si p est FELLER

et on a une proba invariante !

Dém. de : considérons $h \in C_c^0$ et $h \geq 0$ (donc aussi $h \in C_b^0$)

Alors (Feller) $ph \in C_b^0$ et $ph \geq 0$.

$$\left|\Pi^{\mu}_{n_j} p h - \Pi^{\mu}_{n_j} h\right| \leq \frac{2\|h\|_\infty}{n_j} \to 0 \Rightarrow \liminf_j \Pi^{\mu}_{n_j} p h = \liminf_j \Pi^{\mu}_{n_j} h$$

mais on sait que $\Pi p h \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Obs. en haut de la page}}}{\leq} \liminf_j \Pi^{\mu}_{n_j} p h = \liminf_j \Pi^{\mu}_{n_j} h = \Pi h$ car $h \in C_c^0$

$\Rightarrow \Pi p h \leq \Pi h \quad \forall h \in C_c^0, h \geq 0$

i.e. $\int h \, d(\Pi p) \leq \int h \, d\Pi$ (1)

mais $\Pi p(E) \overset{(2)}{=} \Pi(E)$ (car $p(x,E) = 1 \ \forall x$)

Et (1)+(2) $\Rightarrow \Pi p = \Pi$ (argument de théorie de la mesure déjà utilisé) $\square$

Th.: E localement compact. p est Feller. $V : E \to [0,\infty]$ est $\exists x_0$ t.q. $V(x_0) < \infty$, $b > 0$ et K compact, t.q.

$$pV \leq V - 1 + b\mathbb{1}_K$$

Alors il existe une probabilité invariante.