COURS CHAÎNES DE MARKOV
EXAMEN, 6 NOVEMBRE 2023

Durée : 2h30. Aucun document personnel n'est autorisé. Toute réponse doit être justifié.

Question de cours. $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ est une $\mathtt{p}$-MC avec espace d'état $(E, \mathcal{E})$ général. On fait l'hypothèse qu'il existe $x \in E$ tel que $\rho_{y,x} := \mathbb{P}_y(T_x < \infty) > 0$ pour tout $y \in E$ ($T_x = \inf\{n = 1, 2, \dots :\ X_n = x\}$) et tel que $\rho_{x,x} = 1$.

(1) On rappelle que x est accessible si pour tout y il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathtt{p}_k(y, \{x\}) > 0$. Montrer que x est accessible.

(2) Discuter l'existence d'une mesure $\mathtt{p}$-invariante.

(3) Discuter l'unicité d'une mesure $\mathtt{p}$-invariante.

(4) Donnez un exemple d'une telle MC sur un espace E non dénombrable (avec explications détaillées si possible).

(5) Montrer que si il existe $z \in E$ tel que $\rho(x, z) > 0$ alors $\rho_{z,z} = \rho_{z,x} = \rho_{x,z} = 1$.

Ex. 1. Considérons un processus de naissance et mort (avec les notations du cours : les notes sur cette partie du cours sont à disposition) avec $r_0 = 1/2$ et $r_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots$ et

$$q_j \;=\; \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\delta}{2j}\right) \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots\,,$$

avec $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $|\delta| < 2$. (X_n) est une $\mathtt{p}$-MC avec $X_0 = x_0 \in E$. On rappelle que $|(\sum_{j=1}^{n} 1/j) - \log(n)| \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$.

(1) Montrer que cette MC est irréductible.

(2) Montrer que cette MC est apériodique.

(3) Montrer que si $\delta < -1$ cette MC est transitoire.

(4) Montrer que si $\delta > 1$ cette MC est récurrente positive.

(5) Montrer que si $\delta \in (-1, 1)$ cette MC est récurrente nulle.

(6) Discuter la convergence p.s. de la suite $\left((1/n)\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{0\}}(X_j)\right)_{n=1,2,\dots}$ en dependance de la valeur de δ.

(7) Discuter la convergence de la suite $(\mathbb{P}(X_n = 0))_{n=1,2,\dots}$ en dependance de la valeur de δ.

Ex. 2. On considère une suite $(\eta_j)_{j=1,2,\dots}$ IID avec $\mathbb{P}(\eta_1 \geq 0) = 1$ et $\mathbb{E}[\log \eta_1] \in [-\infty, 0)$. On suppose aussi que η_1 n'est pas triviale (i.e., η_1 n'est pas une constante). On introduit alors un processus $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ à valeurs dans $[0,\infty)$ par récurrence : X_0 est indépendante de $(\eta_j)_{j=1,2,\dots}$ et pour $n = 1, 2, \dots$

$$X_n = \eta_n X_{n-1} + \eta_n =: h_{\eta_n}(X_{n-1}) .$$

Donc pour le processus avec $X_0 = x \geq 0$ on a

$$X_n = h_{\eta_n} \circ h_{\eta_{n-1}} \circ \cdots \circ h_{\eta_1}(x) .$$

(1) Montrer que (X_n) est une MC et exprimer son noyau de transition en termes de la variable aléatoire η_1.

(2) Montrer que la suite $(h_{\eta_1} \circ h_{\eta_2} \circ \cdots \circ h_{\eta_n}(x))_{n=0,1,\dots}$ converge p.s. vers une variable aléatoire limite Y.

(3) Montrer que, pour toute loi de X_0, la suite $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ converge en loi vers Y.

(4) Montrer que la loi de Y est une probabilité invariante pour la MC $(X_n)_{n=0,1,\dots}$.

(5) Montrer que la loi de Y est l'unique probabilité invariante pour la MC $(X_n)_{n=0,1,\dots}$.

(6) Montrer que si $\mathbb{P}(\eta_1 = 0) > 0$ alors l'état 0 est récurrent et accessible.

(7) Montrer que, sous l'hypothèse $\mathbb{P}(\eta_1 = 0) > 0$, la suite $(\mathbb{P}(X_n \in B))_{n=0,1,\dots}$ converge pour tout B sous ensemble borelien de $[0,\infty)$ et pour X_0 de loi arbitraire.

(8) Peut-on obtenir le même résultat qu'au point (7) dans le cas $\eta_1 \sim U([0,2])$?

Question de cours.

(1) $\mathbb{P}_y(T_x < \infty) > 0$ implique qu'il existe $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ tel que $\mathbb{P}_y(T_x = k) > 0$ et $\mathtt{p}_k(y, \{x\}) = \mathbb{P}_y(X_k = x) \geq \mathbb{P}_y(X_1 \neq x, \ldots, X_{k-1} \neq x, X_k = x) = \mathbb{P}_y(T_x = k) > 0$.

(2) λ_x (Ch. 2, Sec. 2) est une measure $\mathtt{p}$-invariante sous ces hypothèses (Th. 2.1(1), Ch. 2).

(3) λ_x est essentiellement unique sous ces hypothèses (Th. 2.1(3), Ch. 2).

(4) Une possibilité est d'introduire le processus de Lindley avec $\mathbb{E}[\xi] < 0$ et expliquer pourquoi 0 est accessible et récurrent.

(5) Prop. 5.4, Ch. 1. On peut aussi donner une preuve en utilisant de point de vue des excursions de x dans x, mais il faut développer les détails.

Ex. 1 Considérons un processus de naissance et mort (avec les notations du cours : les notes sur cette partie du cours sont à disposition) avec $r_0 = 1/2$ et $r_j = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots$ et

$$q_j = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\delta}{2j}\right) \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots ,$$

avec $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $|\delta| < 2$. (X_n) est une $\mathtt{p}$-MC avec $X_0 = 0$.

(1) $r_0 = 1/2$ implique que $p_0 = 1/2$, donc on peut sortir de 0. De plus pour $j = 1, 2, \ldots$ on a $q_j < (1 + (|\sigma|/2))/2 < 1$ car $\delta < 2$ et $q_j > (1 - (|\sigma|/2))/2 > 0$ pour la même raison : i.e., $q_j \in (0, 1)$. Donc $p_j + q_j = 1$ pour $j = 1, 2, \ldots$ implique qu'on a aussi $p_j \in (0, 1)$. On conclut que $Q^{|x-y|}(x, y) > 0$ pour tout $x \neq y$ et donc cette MC est irréductible.

(2) Il suffit de remarquer que $Q(0, 0) = 1/2 > 0$, car ceci di que la période de 0 vaut 1 et, par irréductibilité, c'est la période de tout état.

(3) Montrer que si $\delta < -1$ cette MC est transitoire. Il suffit de remarquer que

$$\frac{q_j}{p_j} = \frac{1 + \frac{\delta}{2j}}{1 - \frac{\delta}{2j}} \overset{j \to \infty}{=} 1 - \frac{|\delta|}{j} + O\left(\frac{1}{j^2}\right), .$$

Donc il existe $c > 0$ telle que $q_j/p_j \leq \exp\left(-\delta/j + c/j^2\right)$ pour tout j

$$\prod_{1 \leq j \leq n} \frac{q_j}{p_j} \leq \exp\left(-\delta \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + c \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}\right) = C \exp\left(-\delta \log(n)\right) = \frac{C}{n^\delta},$$

avec $C = \exp(\delta + c\pi^2/6)$. Donc $\sum_n \prod_{1 \leq j \leq n} \frac{q_j}{p_j} < \infty$ et la MC est transitoire (voir page 22 des notes à disposition).

(4) Pour la récurrence positive il faut regarder la mesure invariante (formule (1.66)) et c'est une question de convergence de la série avec termes $\prod_{k=1}^{n} p_k/q_k$ et $p_k/q_k = 1 - \delta/k + O(1/k^2)$. Donc les termes de cette série sont $O(1/n^\delta$. Donc la série converge et la mesure est normalizable.

(5) C'est encore un exercice sur le comportement asymptotique de $\prod_{j=1}^n q_j/p_j$ et pour montrer que la série avec ces termes diverge si $\delta > -1$. Donc la MC est récurrente si $\delta > -1$. D'autre part la série avec termes $\prod_{k=1}^n p_k/q_k$ diverge si $\delta < 1$ donc la MC est récurrente nulle si $\delta \in (-1, 1)$.

(6) La suite $((1/n)\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{0\}}(X_j))_{n=1,2,\ldots}$ converge vers 0 si la MC est transitoire (ceci est immédiat) ou (Cor. 3.5, Ch. 2) si elle est récurrente nulle car $\mu(\{0\}) < \infty$, avec μ une mesure invariante. Dans le cas récurrent positif (Cor. 3.4, Ch. 2) la limite vaut

$$\pi(0) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^\infty \prod_{k=1}^j \frac{p_{k-1}}{q_k}} \in (0,1) .$$

(7) $\lim_n \mathbb{P}(X_n = 0) = \pi(0)$ si la MC est récurrente positive (la MC est apériodique : Th. 4.2, Ch. 2). Dans le cas transitoire la limite est 0 et ceci est le cas aussi si la MC est récurrente nulle (mais ce résultat n'a pas été démontré dans le cours).

Ex. 2. On considère une suite IID $(\eta_j)_{j=1,2,\ldots}$ avec $\mathbb{P}(\eta_1 \geq 0) = 1$ et $\mathbb{E}[\log \eta_1] \in [-\infty, 0)$. On introduit alors un processus $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ à valeurs réels par récurrence : X_0 est indépendante de $((\eta_j)_{j=1,2,\ldots}$ et pour tout $n = 1, 2, \ldots$

$$X_n = \eta_n X_{n-1} + \eta_n =: h_{\eta_n}(X_{n-1}) .$$

Dans ce qui suit on utilisera la notation $(X_n^{(x)})$ pour le processus avec $X_0 = x \in \mathbb{R}$. En particulier

$$X_n^{(x)} = h_{\eta_n} \circ h_{\eta_{n-1}} \circ \cdots \circ h_{\eta_1}(x) .$$

(1) (X_n) est introduit comme système dynamique aléatoire, donc c'est une MC. Et $\mathtt{p}(x, \cdot)$ est la loi de $\eta_1(x+1)$. Plus explicitement on a $\mathtt{p}(x, [0,y]) = \mathbb{P}(\eta_1 \in [0, y/(1+x)])$ pour $y \geq 0$.

(2) On a

$$h_{\eta_1} \circ h_{\eta_2} \circ \cdots \circ h_{\eta_n}(x) = \eta_1 + \eta_1\eta_2 + \ldots + \eta_1\eta_2 \cdots \eta_n + \eta_1\eta_2 \cdots \eta_n x ,$$

qui est même une suite croissante (mais on n'a pas besoin d'exploiter ça). On voit aisément que p.s. pour tout x

$$\lim_n h_{\eta_1} \circ h_{\eta_2} \circ \cdots \circ h_{\eta_n}(x) = \sum_{j=1}^\infty \prod_{k=1}^j \eta_k =: Y .$$

En fait si $\mathbb{P}(\eta = 0) > 0$ alors pour presque toute réalisation de (η_j) il exists k_0 tel que $\prod_{k=1}^j \eta_k = 0$ pour $k \geq k_0$. Par contre, si $\mathbb{P}(\eta = 0) = 0$, on utilise le fait que $\prod_{k=1}^j \eta_k = \exp(\sum_{k \leq j} \log \eta_k)$ et p.s. $\lim_j (1/j) \sum_{k \leq j} \log \eta_k = \mathbb{E}[\log(\eta)] =: -c < 0$ par la Loi des Grands Nombres. Donc p.s. $\prod_{k=1}^j \eta_k = O(\exp(-cn/2))$, ce qui nous donne la convergence de la série et le fait que le reste $\eta_1\eta_2 \cdots \eta_n x$ tend vers 0 p.s..

(3) Pour $f \in C_b^0$ on a

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}\left[f\left(h_{\eta_1} \circ h_{\eta_2} \circ \cdots \circ h_{\eta_n}(Y_0)\right)\right],$$

avec $Y_0 \sim X_0$ (et Y_0 indépendante de (η_j)). Par (2) one que $h_{\eta_1} \circ h_{\eta_2} \circ \cdots \circ h_{\eta_n}(Y_0) \to Y$ p.s. et donc (DOM) implique que $\lim_n \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(Y)]$.

(4) La propriété de Markov donne $\mathbb{E}[f(X_{n+1})] = \mathbb{E}[\mathtt{p}f(X_n)]$ et le fait que $x \mapsto h_\eta(x)$ est C^0 pout tout $\eta \in [0, \infty)$ implique que $\mathtt{p}f \in C_b^0$. On peut donc passer à la limite et on obtient $\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}[\mathtt{p}f(Y)]$. Si $Y \sim \pi$, on voit que cette égalité peut s'écrire comme $\int f \, \mathrm{d}\pi = \int \mathtt{p}f \, \mathrm{d}\pi$. Cette formule est valable pour tout $f \in C_b^0$ et donc $\pi = \pi\mathtt{p}$.

(5) Si ν est une probabilité quelconque et $X_0 \sim \nu$ on a que (X_n) converge en loi vers Y. Mais ceci est vrai aussi si ν est une probabilité invariante : dans ce cas $X_n \sim X_0$ et donc $X_0 \sim Y$. Donc $\nu = \pi$.

(6) $\mathbb{P}(\eta_j > 0, \, j = 1, 2, \ldots, n) = (1-\delta)^n$, si $\delta := \mathbb{P}(\eta = 0)$. Donc, pour tout x, $\mathbb{P}_x(T_0 > n) = (1-\delta)^n$. Ceci est plus que l'accessibilité car ça montre que $\mathbb{P}_x(T_0 < \infty) = 1$. Et si on choisit $x = 0$ on a la récurrence.

(7) Ceci suit de l'application du Théorème ergodique : on vient de montrer qu'on visite 0 avec probabilité 1 à partir de n'importe quel état (donc la loi de X_0 est arbitraire). De plus $\mathbb{P}_0(T_0 > n) = (1-\delta)^n$, donc $\mathbb{E}_0[T_0] < \infty$ qui nous dit que le processus est récurrent positif. De plus $\mathtt{p}(0, \{0\}) > 0$, donc 0 est apériodique. On peut donc appliquer le Théorème Ergodique et on a le résultat.

(8) Oui : la MC est de Harris. En fait, si la MC est de Harris, dès qu'on sait qu'il existe une probabilités invariante, on sait que la MC auxiliaire est récurrente positive et on peut appliquer le Théorème Ergodique si on a l'apériodicité de l'état α de MC auxiliaire (qui est par exemple automatique si la MC est de Harris avec $A = B$). Dans notre cas : $\eta_1 \sim U([0, 2])$, donc $\mathbb{E}[\log \eta_1] = \log(2) - 1 = -0.3068\ldots$, $A = B = [0, 1]$, ρ est la probabilité uniforme sur B. On a que $\mathtt{p}(x, \cdot)$ est la loi de $(1+x)\eta_1 \sim U([0, 2(1+x))$ et donc, pour $x \leq 1$, sa densité est minorée par $\mathbf{1}_{[0,1]}/4$, qui est $1/4$ la densité de ρ. On peut donc choisir $\varepsilon = 1/4$.