COURS CHAÎNES DE MARKOV
EXAMEN, 7 NOVEMBRE 2022

Durée : 2h30. Aucun document n'est autorisé.

Question de cours 1. Avec la notation standard du cours : $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ est une p-MC avec espace d'état $(E, \mathcal{E})$. Il existe $x \in E$ tel que $\rho_{x,x} := \mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$, $T_x = \inf\{n = 1, 2, \ldots : X_n = x\}$. On suppose aussi que $\rho_{y,x} > 0$ pour tout $y \in E$ et pose pour $A \in \mathcal{E}$

$$\mu_x(A) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbf{1}_{X_n \in A}\right].$$

(1) Montrer que μ_x est p-invariante.

(2) Expliquer pourquoi $p_\star(y, x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} p_k(y, x) > 0$ pour tout $y \in E$.

(3) Montrer que la mesure μ_x est σ-finie. Rappel : on peut montrer (et utiliser) que $E = \cup_n\{y : p_\star(y, x) \geq 1/n\}$.

(4) Discuter l'unicité de μ_x.

Question de cours 2. Enoncer le théorème ergodique presque sûr pour une p-MC dans le cas d'un espace $(E, \mathcal{E})$ général dans lequel il existe un état x tel que $\rho_{x,x} = 1$ et $\rho_{y,x} > 0$ pour tout $y \in E$. Donner les idées de la preuve de ce théorème (maximum une page).

Ex. 1. Pour $\eta \in \{0, 1\}$ et $U \in (0, 1)$ on introduit la fonction

$$x \mapsto f_{\eta,U}(x) := \eta U x + (1 - \eta)(x + U(1 - x)),$$

de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. On se donne deux suite indépendantes (η_n) et (U_n) : (η_n) est une suite IID Ber(1/2) et (U_n) est une suite IID de variables uniformes sur l'intervalle $(0, 1)$. On introduit alors par recurrence $X_{n+1} \overset{n=0,1,\ldots}{:=} f_{\eta_{n+1},U_{n+1}}(X_n)$, avec X_0 indépendante de $(\eta_n), (U_n)$ (il suffira de considerer X_0 non aléatoire). Il est utile de remarquer que $f_{\eta_n,U_n}(x) = \alpha_n x + \beta_n$ et cette relation définit les variables aléatoires α_n et β_n.

(1) Expliquer pourquoi (X_n) est une p-MC avec $E = [0, 1]$ et $\mathcal{E} := \mathcal{B}([0, 1])$.

(2) Ecrire explicitement $\mathbb{E}_x[h(X_1)]$ pour h mesurable et bornée et en déduire que $p(x, \mathrm{d}y)$ a densité $y \mapsto \mathbf{1}_{(0,x)}(y)/(2x) + \mathbf{1}_{(x,1)}(y)/(2(1 - x))$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

(3) Expliquer pourquoi p est un noyau de type Feller et pourquoi (dans ce cas) ceci implique l'existence d'une probabilité p-invariante.

Correction :

(4) Montrer que $\mathbb{E}[\log \frac{|f_{\eta,U}(x) - f_{\eta,U}(y)|}{|x-y|}] \leq -c\cancel{|x-y|}$ avec $c > 0$ que l'on determinera.

(5) Montrer que la variable aléatoire $X_\infty := \beta_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \prod_{j=1}^{n-1} \alpha_j$ est p.s. bien définie.

(6) Montrer que, pour tout choix de X_0, (X_n) converge en loi vers X_∞.

(7) Montrer que la loi π de X_∞ est une probabilité p-invariante.

(8) Montrer que π est l'unique probabilité p-invariante.

(9) Montrer que π a une densité f et $f(x) = C/\sqrt{x(1-x)}$, avec $C > 0$ la constante de normalization. Il s'agit évidemment d'un exercice de calcul : écrivez l'équation intégrale satisfaite par f, puis utilisez $\int_0^x \mathrm{d}y/\sqrt{y(1-y)^3} = 2\sqrt{x/(1-x)}$.

(10) Donner la définition de MC de Harris et montrer que, dans le cas que nous considérons, (X_n) est une MC de Harris avec $A = B = E$.

(11) Montrer que la loi de X_n a une densité f_n pour tout $n = 1, 2, \ldots$ et expliquer pourquoi $\lim_n \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x = 0$.

Ex. 2. $(\xi_n)_{n=1,2,\ldots}$ est une suite IID à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous supposons qu'il existe $L > 0$ tel que $\mathbb{P}(|\xi_1| \leq L) = 1$ et que $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$ et $\sigma^2 := \mathbb{E}[\xi_1^2] > 0$. Nous introduisons une fonction $m : [0, \infty)$ continue, bornée et telle que $m(x) \sim c/x$ pour $x \to \infty$. Nous supposons aussi que $\mathbb{P}(m(x) + \xi > 0) > 0$ ainsi que $\mathbb{P}(m(x) + \xi < 0) > 0$, pour tout $x \geq 0$.

Nous introduisons aussi par récurrence le processus $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$, $X_0 = x \in E := [0, \infty)$, par la relation $X_{n+1} = (X_n + m(X_n) + \xi_{n+1})_+$, où $n = 0, 1, \ldots$

(1) Expliquer pourquoi (X_n) est une p-MC et montrer que p est Feller.

(2) On pose $V(x) := \log(1 + x)$, $x \in E$. En utilisant $\log(1 + y) = y - y^2/2 + O(y^3)$ montrer que si $c < \sigma^2/2$ il existe $x_0 > 0$ tel que $pV(x) \leq V(x)$ pour tout $x \geq x_0$.

(3) Expliquer pourquoi $pV(x) \leq V(x)$ pour tout $x \geq x_0$ implique que (X_n) est récurrente (i.e. que $\rho_{0,0} = 1$). Discuter le problème de l'existence et unicité d'une mesure invariante dans ce cas.

(4) On pose $U(x) := x^2$. Montrer que si $c < -\sigma^2/2$ alors il existe $\varepsilon > 0$ et $x_0 > 0$ tels que $pU(x) \leq U(x) - \varepsilon$ pour tout $x \geq x_0$.

(5) Expliquer pourquoi pour $c < -\sigma^2/2$ la MC (X_n) est récurrente positive. Discuter le problème de l'existence et unicité d'une mesure invariante dans ce cas.

(6) Toujours sous l'hypothèse $c < -\sigma^2/2$, discuter la convergence de la suite de probabilités $(p_n(x, \cdot))_{n=0,1,\ldots}$, i.e. de la suite des lois de X_n quand $X_0 = x$.

Question de cours (1).

3. $1 = \mu_x(\{x\}) \overset{\forall K}{=} \int_E P_K(y,\{x\})\mu_x(dy) = \int_E p_*(y,\{x\})\mu(dy) \geq \int_{E_m} \dots \geq \frac{1}{m}\mu_x(E_m)$

avec $p_* = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} p_m$ et $E_m := \{y \in E : p_*(y,\{x\}) \geq \frac{1}{m}\}$

Obs.: $\bigcup_{K=1}^{\infty} E_K = E$ car $\forall y \in E\ \exists K$ t.q. $p_K(y,\{x\}) > 0$

$\mu_x(E_m) \leq m$ □

Ex. 1. $f_{\eta,U}(x) = \eta U x + (1-\eta)(\overbrace{x + U(1-x)}^{x(1-U)+U})$

$= x\underbrace{(\eta U + (1-\eta)(1-U))}_{=\alpha \in (0,1)} + \underbrace{(1-\eta)U}_{=\beta \in [0,1)}$

(1). (X_n) p-MC (cours)

(2+3). $\int h(y)p(x,dy) = \mathbb{E}[h(\eta U x + (1-\eta)(x + U(1-x)))]$
$h \in L^\infty$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 h(ux)\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 h(x + u(1-x))\,du$

$= \frac{1}{2x}\int_0^x h(y)\,dy + \frac{1}{2(1-x)}\int_x^1 h(y)\,dy$ et la densité est ok

$x \mapsto f_{\eta,U}(x)$ est C^0 $\forall \eta \in \{0,1\}$, $U \in (0,1)$

$\Rightarrow$ par (DOM) on a que $ph \in C_b^0$ si $h \in C_b^0$ (donc Feller)

$\Pi_n^x(dy) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} p_j(x,dy)$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

avec $\Pi_n^x([0,1]) = 1$ $\forall n$. Donc (Π_n^x) est tendue et

limites Π par fonctions sont des mesures p-invariantes (cours).

(4.) $f_{\eta,U}(x) - f_{\eta,U}(y) = \alpha(x-y)$

$\alpha = \eta U + (1-\eta)(1-U)$ et $\mathbb{E}[\log \alpha] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\log U] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\log(1-U)]$

$= \mathbb{E}[\log U] = -1$. $(C=1)$

(5-6) $X_n = f_{\eta_n,U_n} \circ f_{\eta_{n-1},U_{n-1}} \circ \dots \circ f_{\eta_1,U_1}(x)$ $\quad X_0 = x$

$X_1 = \alpha_1 x + \beta_1$

$X_2 = \alpha_2\alpha_1 x + \alpha_2\beta_1 + \beta_2$

$X_3 = \alpha_3\alpha_2\alpha_1 x + \alpha_3\alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_2 + \beta_3$

$\vdots$

$X_n = \alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_1 x + \alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_2\beta_1 + \alpha_n\cdots\alpha_3\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_{n-1} + \beta_n$

égalité en loi

$\sim \alpha_1\cdots\alpha_n x + \beta_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_1 + \dots + \beta_2\alpha_1 + \beta_1$ (Echange $1 \to n$ à $n \to 1$)

$= \underbrace{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n x}_{\xrightarrow{p.s.} 0} + \beta_1 + \sum_{j=2}^{n-1}\beta_j\prod_{k=1}^{j-1}\alpha_k \xrightarrow[p.s.]{n\to\infty} \beta_1 + \beta_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_1\alpha_2 + \beta_4\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \dots = X_\infty$

(suite de Cauchy) aussi suite $\uparrow$, mais il faut remarquer qu'elle est bornée

$\log\prod_{k=1}^{n}\alpha_k \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\sim}} n\,\mathbb{E}[\log\alpha] = -n$ et $\mathbb{P}(\beta\in[0,1]) = 1$

$\forall x\in E$
$\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_\infty$

(7) $h\in C_b^0$: $\int h\,d\pi = \mathbb{E}[h(X_\infty)] = \lim_n \mathbb{E}[h(X_n)] = \lim_n \mathbb{E}[h(X_{n+1})] = \lim_n \mathbb{E}[ph(X_n)]$ $\quad \in C_b^0$ (Feller)

$= \mathbb{E}[ph(X_\infty)] = \int ph\,d\pi$

$= \int p(y,dx)h(x)\pi(dy)$

i.e. $\pi = \pi p$ $\square$

(8) π' proba t.q. $\pi' = \pi' p$ $\qquad \mathbb{E}_{\pi'}[h(X_n)] = \iint \pi'(dx)\,p_n(x,dy)\,h(y) \longrightarrow \mathbb{E}[h(X_\infty)] = \mathbb{E}_\pi(h(X_0))$ $\quad h\in C_b^0$

$= \mathbb{E}_{\pi'}[h(X_0)]$ $\qquad$ (Dom / CV)

Mais on a vu que $\int p_n(x,dy)h(y) = \mathbb{E}_x[h(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[h(X_\infty)]$ $\forall x\in E$

$\Rightarrow \pi' = \pi$

(9) $\pi p = \pi \iff$ si $\pi(dx) = f(x)\,dx$

$$f(y)\,dy = \int f(x)\, p(x, dy)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} \mathbb{1}_{(y,1)}(x)\, f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} f(x)\, \mathbb{1}_{(0,y)}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_y^1 \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{f(x)}{1-x}\,dx$$

On calcule le membre de droite $/C$:

$$\frac{1}{2}\left(\int_y^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3(1-x)}}\right) + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x(1-x)^3}}\,dx = \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \quad \underline{\text{OK!}}$$

$$'' \int_0^{1-y} \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}}\,dx$$

Donc $\pi(dx) = f(x)\,dx$ est la proba invariante ! (Par unicité).

(10) $p(x, dy) \geq \left(\frac{\mathbb{1}_{(0,x)}(y)}{2} + \frac{\mathbb{1}_{(x,1)}(y)}{2}\right) dy = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)\,dy \quad \forall x$

$\Rightarrow$ on peut choisir $A = B = [0,1]$ et $\varepsilon = 1/2$

(11) Le th. ERGODIQUE nous dit que $d_{VT}(p_n(x,\cdot), \pi(\cdot)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\times$ apériodique car $A = B$.

Mais $p(x,\cdot)$ a une densité, donc $X_1, X_2, \ldots$ ont une densité (par rapport à Lebesgue sur $[0,1]$) $^{(*)}$

Dès que $d_{VT}(p_n(x,\cdot), \pi(\cdot)) = \int \left| \frac{p_n(x,dy)}{dy} - \pi(y) \right| dy \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\square$

$n \geq 1$; densité de π; densité de $p_n(x,\cdot)$

$(*)$ si X_n a densité g, $E[h(X_{n+1})] = \iint g(x)\, p(x, dy)\, h(y)\, dx$

densité $K(x,y)$

$$\xrightarrow{\text{Fubini-Tonelli}} = \int g(x) K(x,y)\, h(y)\, dy\, dx$$

$$= \int h(y) \underbrace{\left(\int g(x) K(x,y)\, dx\right)}_{\text{densité de } X_{n+1}\ (\square)} dy \quad (**)$$

Ex. 2: (1) pareil que Ex. 1

(2) $$pV(n) = \mathbb{E}\left[\log\left(1+(n+m(n)+\xi)_+\right)\right]$$
$|n > L + \|m\|_\infty$
$$= \mathbb{E}\left[\log(1+n+m(n)+\xi)\right]$$
$$= \log(1+n) + \mathbb{E}\left[\log\left(1+\frac{m(n)}{1+n}+\frac{\xi}{1+n}\right)\right]$$
$$= \log(1+n) + \mathbb{E}\left[\frac{m(n)}{1+n}+\frac{\xi}{1+n}\right] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{m(n)}{1+n}+\frac{\xi}{1+n}\right)^2\right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$= V(n) + \frac{m(n)}{1+n} - \frac{\sigma^2}{2(1+n)^2} + \frac{m(n)^2}{(1+n)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$= V(n) + \frac{(c-\frac{\sigma^2}{2})}{(1+n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \geq n_0}{<} V(n) \qquad \text{car } c < \frac{\sigma^2}{2}$$

(3) Dans (2) on a montré que
$$pV \leq V + b\mathbb{1}_{[0,n_0]} \quad \text{avec } b := \max_{n\in[0,n_0]}\left(pV(n) - V(n)\right).$$
Nous avons montré dans le cours que ceci implique (notez que $\mathbb{P}(m(n)+\xi \geq 0) > 0 \Rightarrow (X_n)$ n'est pas piégé !) que il existe $L' > 0$ t.q. $\mathbb{P}_n(X_n \in [0, L'] \text{ i.o.}) = 1$ $\forall n$. En utilisant à nouveau que $\mathbb{P}(m(n)+\xi < 0) > 0$ on extrait aisément que $\mathbb{P}_n(X_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$ $\forall n$ $\Rightarrow \rho_{00} = 1$ (et $\rho_{y0} > 0$ à nouveau par ?). Donc (Cours) $\exists$ "!" mesure invariante (pas forcément normalisable).

(4) $U(n) = n^2$: $$pU(n) \overset{n \geq L+\|m\|_\infty}{=} \mathbb{E}\left[(n+m(n)+\xi)^2\right]$$
$$= U(n) + 2n\,m(n) + \sigma^2$$
$$= U(n) + 2c + \sigma^2 + o(1) \quad (n\to\infty)$$
$$\overset{n \geq n_0'}{\leq} U(n) - \varepsilon, \quad \varepsilon = -c - \frac{\sigma^2}{2} > 0$$
i.e. $pU(n) \leq U(n) - \varepsilon + b\mathbb{1}_{[0,n_0]}(n)$

avec b bien choisi

(5) $V(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow pV \leq V - 1 + c\,\mathbb{1}_{[0,k_0]}$, $c = \frac{b}{2}$

On a vu (cours) que ceci implique $\exists\, \pi$ proba invariante

De façon élémentaire on montre que $\pi(\{0\}) > 0 \Rightarrow \pi = \frac{\mu_k}{\mu_k(E)}$

et π est l'unique mesure (pas seulement proba) invariante.

(6) Grâce à (5), on peut aussi appliquer le Th. ERGODIQUE $\left(p(0,\{0\}) > 0\right.$

apériodicité! $\rightarrow \overset{\shortparallel}{\mathbb{P}}\left.(u_1(0)+\xi<0)\right)$

$\Rightarrow d_{VT}\left(p_n(x,\cdot), \pi(\cdot)\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall x \geq 0.$