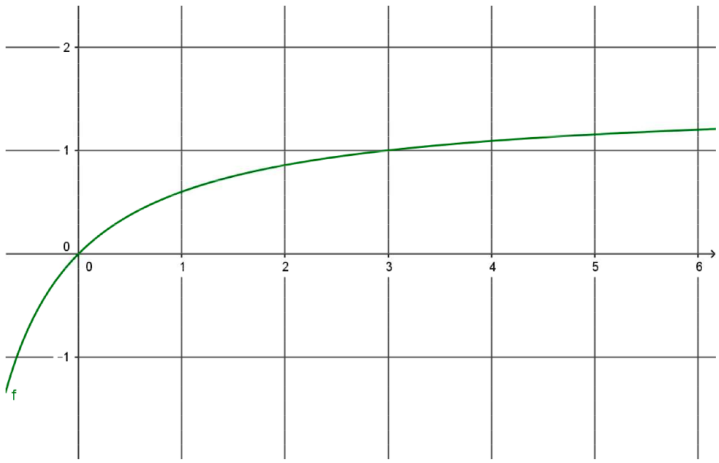
Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{3x}{3+2x}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que le graphe de f admet une asymptote.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau des variations de f.

On définit une suite (u_n) par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\dfrac{3\,u_n}{3+2\,u_n}$.

3. Calculer u_1, u_2 et u_3. On a représenté ci-après le graphe de la fonction f. Placer sur l'axe des abscisses les valeurs u_0, u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les tracés nécessaires à la construction.
4. Montrer par récurrence que $u_n>0$ pour tout $n\geq 0$.
5. **a.** Soient x et y tels que $0<x\leq y$. Montrer alors que $f(x)\leq f(y)$.
   b. Montrer par récurrence que $u_{n+1}\leq u_n$ pour tout $n\geq 0$.
   c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle est bornée.
   d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. Pour tout $n\geq 0$, on pose $v_n=\dfrac{1}{u_n}$. (*La suite* (v_n) *existe car pour tout entier* k, $u_k\neq 0$)
   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.
   c. Retrouver le fait que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.



Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+5=0$ (E).
   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
2. On note A et B les points dont les affixes z_A et z_B sont les solutions de l'équation (E), en notant A le point dont les coordonnées sont de signe contraire. Calculer $|z_A|$ et $|z_B|$.
3. Que peut-on dire du triangle OAB ?
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z\in\mathbb{C}$ tels que $|z-1+2i|=1$.
5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe $z\in\mathbb{C}$ tels que $|z-5+i|=3$.
6. Représenter, sur un même dessin, les points A et B, le point C d'affixe $z_c=5-i$, ainsi que les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
7. Calculer $|z_A-z_C|$. En déduire qu'il n'existe aucun point appartenant à la fois à $\mathcal{E}$ et à $\mathcal{F}$.

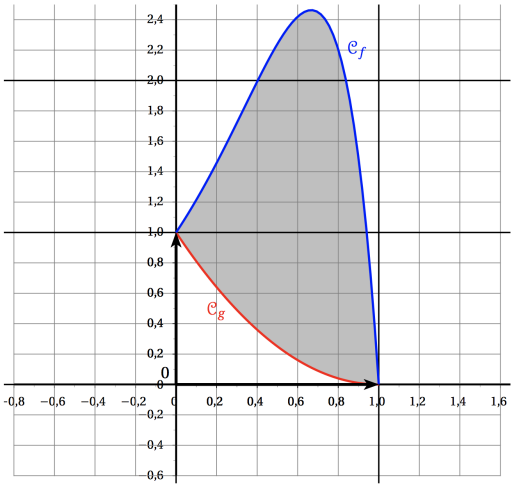
Exercice 3

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{3x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Leurs courbes représentatives seront notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$. Préciser le maximum de f et la valeur de x en lequel il est atteint.
3. Déterminer des nombres réels a et b tels que la fonction F définie sur $[0\,;\,1]$ par $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{3x}$ soit une primitive de F sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9}$.
5. La courbe $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au point A et l'axe des ordonnées au point B.
   a. Déterminer les coordonnées des points A et B.
   b. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe aussi par les points A et B.
6. **a.** Montrer que, pour tout x dans $[0\,;\,1]$, $f(x) - g(x) = (1-x)\,h(x)$, où h est une fonction que l'on déterminera.
   b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0\,;\,1]$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.
7. Le motif est représenté par la partie grisée sur le graphique ci-dessous, partie dont on se propose de calculer l'aire.



   a. Calculer $\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$.
   b. En déduire l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. En donner une valeur approchée arrondie au dixième.

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 150 \ \text{ et pour tout entier naturel } \ n,\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 45.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. **a.** La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
   b. La suite (u_n) est-elle géométrique ?
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 225$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
   b. En déduire la valeur de u_n pour tout entier naturel n.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 220$.
6. Compléter l'algorithme suivant afin de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 220$.

Variables :	
	N est un entier naturel U est un nombre réel
Initialisation :	
	U prend la valeur .... N prend la valeur ....
Traitement :	
	Tant que .... prend la valeur .... prend la valeur .... Fin Tant que
Sortie :	
	Afficher N

Exercice 5

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- la droite Δ d'équation $y = 0,5x + 3$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0 ;
- la tangente Δ' à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Chaque réponse devra être justifiée.

1. À l'aide des informations précédentes :
   a. donner la valeur de $f'(1)$;
   b. donner les valeurs de $f'(0)$ et de $f(0)$.

On admet qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x + 5, \text{ pour tout réel } x \text{ de } [-3\ ;\ 2].$$

2. En utilisant les résultats de la question 1, montrer que $c = -2$.
3. Montrer que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3\ ;\ 2]$, par :

$$f'(x) = \left(ax^2 + (2a + b)x - 2 + b\right)\mathrm{e}^x.$$

4. Déterminer les valeurs de a et b.

Exercice 6

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.
   a. Calculer le module et un argument du nombre a.
   b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = ia$, $b' = -b$ et $c' = -ic$. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′A], [B′B] et [C′C].

3. Calculer r, s et t.

4. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Exercice 7

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

b. En déduire la valeur exacte de u_1.

3. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln(x^2+1).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admettra.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2+1)$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.

5. Étudier les variations de la suite (u_n).

6. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

7. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. En déduire la valeur de ℓ.

8. *Question bonus :* après avoir montré que pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = -\ln\left(x^2\,\mathrm{e}^{-x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, montrer que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Exercice 9

Une base nautique propose la location de différentes embarcations pour visiter les gorges du Verdon. Les touristes peuvent louer des kayaks, des pédalos ou des bateaux électriques, pour une durée de 1 heure ou 2 heures.

Une étude statistique met en évidence que :

- 40 % des embarcations louées sont des pédalos ;
- 35 % des embarcations louées sont des kayaks ;
- les autres embarcations louées sont des bateaux électriques ;
- 60 % des pédalos sont loués pour une durée de 1 heure ;
- 70 % des kayaks sont loués pour une durée de 1 heure ;
- la moitié des bateaux électriques sont loués pour une durée de 1 heure.

On interroge au hasard un touriste qui vient pour louer une embarcation. On note A, B, C, D et E les événements suivants :

- A : « l'embarcation louée est un pédalo » ;
- B : « l'embarcation louée est un kayak » ;
- C : « l'embarcation louée est un bateau électrique » ;
- D : « l'embarcation est louée pour une durée de 1 heure » ;
- E : « l'embarcation est louée pour une durée de 2 heures ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $p(A \cap E)$.
3. Montrer que la probabilité pour que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39.
4. Le touriste a loué une embarcation pendant 2 heures. Quelle est la probabilité que ce soit un bateau électrique ?
5. Cinq touristes se présentent à l'accueil de la base nautique, indépendamment les uns des autres, chacun pour louer une embarcation.
   Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des embarcations louées le soit pendant 2 heures ? Donner une valeur approchée arrondie au millième.

Exercice 10

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur ...
	S prend la valeur ...
Traitement :	Pour k variant de ... à ... faire
	... prend la valeur ...
	... prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.
2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.
2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 4 - 3x^2$, et soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$.
On note :
– $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;
– $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ d'une part, les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ d'autre part ;
– $\mathcal{A}_2$ l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ d'une part, les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.
Le but du problème est de déterminer les valeurs du nombre a satisfaisant à la condition (E) : « les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales ».

1. Étudier les variations de la fonction f et vérifier que f est positive.
2. Démontrer que si a est un réel satisfaisant à la condition (E), alors a est solution de l'équation
$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$
3. Montrer que l'équation $\frac{x^3}{4} + \frac{3}{8} = x$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$, l'une strictement négative, l'autre, notée a, appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a. Calculer u_1.
   b. Montrer que la fonction g est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
   d. Montrer que la suite (u_n) est convergente. À l'aide des opérations sur les limites, prouver que sa limite est a.
   e. On admet que le réel a vérifie l'inégalité : $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer une valeur approchée de a à 10^{-8} près.