UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

DOCUMENT DE SYNTHÈSE

POUR L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

Frédérique Petit

19 décembre 2003

Jury composé de

Patrick CATTIAUX

Thierry JEULIN

Dominique LÉPINGLE

Alain ROUAULT

Marc YOR

Rapporteurs

Dominique LÉPINGLE

Jim PITMAN

Pierre VALLOIS

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Thierry Jeulin, Patrick Cattiaux et Marc Yor pour l'aide qu'ils m'ont apportée dès mes débuts et la disponibilité dont ils ont fait preuve à mon égard, Thierry Jeulin m'ayant initié aux joies du calcul stochastique dès mon DEA, Patrick Cattiaux m'ayant soutenue en particulier aux moments les plus difficiles de ma thèse, et Marc Yor m'ayant en permanence encouragée ou aidée. Je les remercie ici vivement d'avoir bien voulu faire partie de ce jury.

Je suis reconnaissante à Jim Pitman, Dominique Lépingle et Pierre Vallois qui ont chacun accepté d'examiner ce document. Qu'ils soient remerciés pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail.

J'associe à ces remerciements Alain Rouault qui me fait l'honneur de participer à mon jury en ces périodes chargées.

Voilà maintenant de nombreuses années que je fréquente le laboratoire de Probabilités. J'en remercie les membres qui m'ont soutenue en de maintes occasions, en particulier Philippe Carmona qui m'a aidée à suivre le rythme de travail effréné de Marc Yor (nous n'étions pas trop de deux !) et Catherine Donati.

Ma vie d'enseignante à l'université a été dynamisée et éclairée par Annick Auzimour dès mes débuts, ses qualités humaines profondes m'ont beaucoup apporté. Qu'elle en soit ici remerciée.

Je souhaite encore associer à ces remerciements Françoise Bertein, et les équipes du CAPES et de l'Université En Ligne, avec lesquelles je partage des moments d'enseignement riches, complémentaires à l'activité du chercheur.

Enfin, les cercles d'amis qui m'entourent sont toujours un appui sûr pour aller de l'avant, et pour ne citer que ceux ayant touché aux mathématiques, Bénédicte, Catherine, Fabienne, Gilles, Josiane, Marie-Claude, Sophie, Véronique...

Que ma famille trouve ici aussi tous mes remerciements, mes parents (sans lesquels ces travaux n'auraient pu être réalisés !), Hélène et Tonton Zipé, ainsi que mes trois filles Anne, Marie et Charlotte, et leur papa, Jean.

Présentation

Les principaux sujets auxquels je me suis intéressée peuvent être classés en quatre thèmes :

- lois de l'arc-sinus généralisé et mouvements browniens perturbés ;

- fonctionnelles exponentielles de processus de Lévy ;

- support d'une diffusion réfléchie de type Ventcell ;

- problèmes de retournement du temps liés aux diffusions de Nelson.

Dans les quelques pages qui suivent, je vais essayer de décrire les objets sur lesquels j'ai travaillé avec mes collaborateurs, les méthodes utilisées pour les étudier, et l'intérêt qu'ils peuvent présenter dans la littérature. Nous renvoyons aux articles concernés pour plus de détails.

Travaux publiés ou à paraître

[1] Sur les fonctionnelles exponentielles de certains processus de Lévy. *Stochastics and Stochastics Reports* (en collaboration avec Ph. Carmona et M. Yor), vol. 47, p. 71–101, 1994. Traduction anglaise dans *Exponential functionals of Brownian motion and related processes,* Marc Yor, Springer Finance, p. 139–171, 2001.

[2] Some extensions of the arc sine law as partial consequences of the scaling property of Brownian motion (en collaboration avec Ph. Carmona et M. Yor). *Probability Theory and Related Fields,* vol. 100, p. 1–29, 1994.

[3] Théorème du support pour les diffusions réfléchies de type Ventcell. *Annales de l'Institut Henri Poincaré,* vol. 32, p. 135–210, 1996.

[4] Time reversal and reflected diffusions. *Stochastic Processes and their Applications,* vol. 69, p. 25–53, 1997.

[5] Beta variables as time spent in $[0, +\infty[$ by certain perturbed Brownian motions (en collaboration avec Ph. Carmona et M. Yor). *Journal of the London Mathematical Society,* (2) 58, p. 239–256, 1998.

[6] On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes (en collaboration avec Ph. Carmona et M. Yor). Exponential functionals and principal values related to Brownian motion. *Biblioteca de la Revista Matemática Ibero-Americana,* p. 73–121, 1998.

[7] An estimate of the moments of $A_t = \int_0^t \exp(\xi_s)\, ds$. Exponential functionals and principal values related to Brownian motion (en collaboration avec M. Yor). *Biblioteca de la Revista Matemática Ibero-Americana,* p. 122–126, 1998.

[8] On principal values of perturbed Brownian motion. Exponential functionals and principal values related to Brownian motion, *Biblioteca de la Revista Matemática Ibero-Americana,* p. 229–242, 1998.

[9] Beta-gamma random variables and intertwining relations between certain Markov processes (en collaboration avec Ph. Carmona et M. Yor). *Biblioteca de la Revista Matemática Ibero-Americana,* vol. 14 (2), p. 311–367, 1998.

[10] An identity in law involving reflecting Brownian motion, derived from generalized arc-sine laws for perturbed Brownian motions (en collaboration avec Ph. Carmona et M. Yor). *Stochastic Processes and their Applications,* vol. 79 (2), p. 323–333, 1999.

[11] On the laws of homogeneous functionals of the Brownian bridge (en collaboration avec Ph. Carmona, J. Pitman et M. Yor). *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 35*, p. 445–455, 1999.

[12] Exponential functionals of Lévy processes (en collaboration avec Ph. Carmona et M. Yor). Dans S. Resnick, O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch editors, *Lévy Processes Theory and Applications*, p. 41–55, Birkhaüser, 2001.

[13] Pricing path-dependent options in some Black-Scholes market, from the distribution of homogeneous Brownian functionals (en collaboration avec T. Fujita et M. Yor). À paraître dans *Journal of Applied Probability*, vol. 41 (1), mars 2004.

[14] A trivariate law for certain processes related to perturbed Brownian motions (en collaboration avec Ph. Carmona et M. Yor). À paraître dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 2004.

[N] Quelques extensions de la loi de l'arcsinus. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* t. 315, Série I, p. 855–858, 1992.

[P] Itô's formula and the marginals of certain submartingales (en collaboration avec M. Yor). Proceedings INRIA, Journées sur les Mathématiques financières, eds : A. Shyriaev, A. Sulem, 18-19 mai 1998, p. 164–167.

Autres travaux

[T] Quelques extensions de la loi de l'arcsinus. Théorème du support pour les diffusions réfléchies de type Ventcell. Problèmes d'entropie et de retournement du temps. Thèse de doctorat de l'université Paris VII, février 1992.

[D1] Time reversal and Nelson diffusions (en collaboration avec P. Cattiaux). Document de travail, 1996.

[D2] Lack of stochasticity of perturbed Brownian motions (en collaboration avec Ph. Carmona et M. Yor). Document de travail, 1996.

[D3] Sur un problème de J. P. Imhof relatif au pont brownien. Document de travail, 1994.

Publications pédagogiques, avec A. Auzimour

Journal de bord. DEUG MIAS, Algèbre I, Analyse I, sept. 1997.

Travaux Dirigés. Collection *Livre de bord*, Éd. Vuibert.
Algèbre I, Algèbre II, Algèbre III, Analyse I, Analyse II, Analyse III, 1998.
Analyse IV, Analyse V, 1999.
Algèbre IV, 2001.
Algèbre V, 2002.

Notations

G_a : variable gamma de paramètre $a > 0$, i.e. $\mathbb{P}[G_a \in dz] = \dfrac{e^{-z}\, z^{a-1}}{\Gamma(a)}\, 1_{(z>0)}\, dz$.

$G_{a,b}$: variable béta de paramètres $a > 0$ et $b > 0$, i.e. $\mathbb{P}[G_{a,b} \in dz] = \dfrac{z^{a-1}\,(1-z)^{b-1}}{B(a,b)}\, 1_{(0<z<1)}\, dz$.

$X \overset{\text{loi}}{=} Y$ signifie que les variables aléatoires X et Y ont même loi.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, x^+ = \sup(0,x)$ et $x^- = \sup(0,-x)$.

$\mathcal{C}^2_M([0,T],\mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{C}^0(A,B)$: ensemble des fonctions continues définies sur $A \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $B \subset \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{C}_K(A,B)$: ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^0(A,B)$ à support compact.

$\mathcal{C}^\infty_K(A,B)$: ensemble des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathcal{C}_K(A,B)$.

$\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$: ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables, tendant vers 0 à l'infini.

$||x_.||_T = \sup\limits_{0\le s\le T} ||x_s||$, si $(x_s; 0 \le s \le T)$ est une fonction continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Brefs rappels

- L'algèbre des lois béta-gamma.

$$\forall\ a > 0,\ \forall\ b > 0, \quad (G_a + G_b\,,\, \frac{G_a}{G_a+G_b}) \overset{\text{loi}}{=} (G_{a+b}\,,\, G_{a,b}),$$

où, dans les deux membres, les variables aléatoires considérées sont indépendantes.
Pour d'autres propriétés de l'algèbre des lois béta-gamma, voir [D98] (cf. référence p. 30).

- Les carrés de Bessel, voir [RY99], Chapitre XI (cf. référence p. 17).
Soient B un mouvement brownien standard, $\delta \ge 0$, $x \ge 0$. On appelle carré de Bessel de dimension δ issu de x l'unique solution forte de l'équation :

$$R_t = x + 2\int_0^t \sqrt{R_s}\, dB_s + \delta\, t.$$

Lorsque $\delta = n$ est un entier naturel non nul, le carré de Bessel peut être vu comme le carré de la norme d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$.
Lorsque $\delta < 0$, le carré de Bessel de dimension δ peut être défini de la même façon jusqu'à ce qu'il atteigne 0.

1 Mouvements browniens perturbés

Cette partie regroupe les travaux [N], [P], [2], [5], [8], [10], [11], [14].

1.1 Les lois de l'arc sinus pour le μ-processus et le rôle clé joué par la propriété de scaling

Soit $(B_s; s \geq 0)$ un mouvement brownien standard. Notons :

$$A_t^+ = \int_0^t 1_{(B_s \geq 0)}\, ds \quad \text{et} \quad A_t^- = \int_0^t 1_{(B_s \leq 0)}\, ds,$$

les temps passés au-dessus et en dessous de 0 par le processus $(B_s; s \geq 0)$ jusqu'en l'instant t. Paul Lévy a montré [L39] que, pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $\frac{1}{t} A_t^+$ suit la loi de l'arc sinus :

$$(1) \qquad \frac{1}{t} A_t^+ \overset{\text{loi}}{=} G_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \quad \text{i.e.} \quad \mathbb{P}[\,\frac{1}{t} A_t^+ \in dx] = \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \; 0 < x < 1,$$

et que, si $(p(s))_{0 \leq s \leq 1}$ désigne le pont brownien standard,

$$(2) \qquad \text{la variable} \quad \int_0^1 1_{(p(s) \geq 0)}\, ds \quad \text{est uniformément distribuée sur } [0,1].$$

Pour démontrer sa première loi de l'arc sinus, P. Lévy a prouvé que, si $(\tau_s)_{s \geq 0}$ désigne l'inverse continu à droite de $(L_t)_{t \geq 0}$ le temps local en 0 du mouvement brownien B, alors :

$$(3) \qquad \forall\, t > 0, \quad \frac{1}{t} A_t^+ \overset{\text{loi}}{=} \frac{A_{\tau_s}^+}{\tau_s} = \frac{A_{\tau_s}^+}{A_{\tau_s}^+ + A_{\tau_s}^-}.$$

La loi de l'arc sinus en découle, puisque les processus $(A_{\tau_s}^+)_{s \geq 0}$ et $(A_{\tau_s}^-)_{s \geq 0}$ sont deux subordinateurs stables d'indice $\frac{1}{2}$ indépendants.
Par la suite, Barlow-Pitman-Yor [BPY89] ont renforcé le résultat de Lévy en démontrant :

$$(4) \qquad \forall\, t > 0, \forall\, s > 0, \; \frac{1}{(L_t)^2}(A_t^+, A_t^-) \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{s^2}(A_{\tau_s}^+, A_{\tau_s}^-).$$

Ce qui peut même être renforcé en montrant (voir Pitman-Yor [PY92]) :

$$(5) \qquad \forall\, t > 0, \forall\, s > 0, \; \frac{1}{t}(V_1(t), ..., V_n(t), ...) \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{\tau_s}(V_1(\tau_s), ..., V_n(\tau_s), ...),$$

où $V_1(t) \geq V_2(t) \geq ... \geq V_n(t) \geq ...$ est la suite décroissante des longueurs des excursions du mouvement brownien sur l'intervalle de temps $[0, t]$.

Nous avons étendu certains de ces résultats au cas où le mouvement brownien B est remplacé par le μ-processus X^μ défini comme la différence d'un mouvement brownien réfléchi et d'un multiple de son temps local en 0, c'est-à-dire que $X_t^\mu \equiv |B_t| - \mu\, L_t$, où μ est une constante strictement positive. On voit aisément, grâce au lemme de réflexion de Skhorokhod, que le μ-processus satisfait à l'équation $X_t^\mu = \hat{B}_t + \beta \inf\limits_{s\leq t} X_s^\mu$, où $\beta = 1 - \frac{1}{\mu}$, et où $\hat{B} = |B| - L$ est un mouvement brownien (cf. [5], section 1.1). C'est pourquoi on l'appelle aussi mouvement brownien β-perturbé. Il se comporte comme le mouvement brownien standard sauf quand il atteint son minimum, et, hormis le cas $\mu = 1$, il n'est pas markovien. Notons au passage qu'il hérite de la propriété de scaling du mouvement brownien.
Désignons par $A_t^{\mu,\pm} = \int_0^t 1_{(\pm X_s^\mu \geq 0)}\, ds$ les temps passés au-dessus et en dessous de 0 par le μ-processus. Les variables $A_{\tau_1}^{\mu,\pm}$ apparaissent déjà dans [LGY90], où elles jouent un rôle important dans l'expression des limites en loi du nombre de tours effectués par le mouvement brownien autour de courbes de l'espace partant à l'infini. Le μ-processus intervient aussi dans des théorèmes limites pour des marches aléatoires auto-évitantes (cf. les travaux de B. Tóth, [T94], [T95] et [T96], et ceux de B. Davis, en particulier [Da97]). Pour d'autres exemples où les variables $A_1^{\mu,\pm}$ apparaissent naturellement comme limites (en loi) de fonctionnelles browniennes, voir l'introduction de [2]. Il semblait alors logique d'étudier ce mouvement brownien perturbé X^μ.

Si on note L_t^μ son temps local en 0, nous avons obtenu les extensions suivantes :

Proposition 1. ([T], partie I, et [N], Théorème 1)

$$(6) \qquad \forall\, t > 0, \quad \frac{1}{(L_t^\mu)^2}(A_t^{\mu,+}, A_t^{\mu,-}) \overset{\text{loi}}{=} \left(\frac{1}{8\, G_{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{8\, G_{\frac{1}{2\mu}}}\right),$$

ce qui entraîne en particulier, compte tenu des relations de l'algèbre béta-gamma (cf. rappels) :

$$(7) \qquad \int_0^1 1_{(|B_s| - \mu\, L_s \geq 0)}\, ds \overset{\text{loi}}{=} G_{\frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2}}.$$

et

Proposition 2. ([T], partie I, et [N], Théorème 2)

$$(8) \qquad \textit{conditionnellement à } |B_1| - \mu\, L_1 = 0, \qquad \int_0^1 1_{(|B_s| - \mu\, L_s \geq 0)}\, ds \overset{\text{loi}}{=} G_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu}, 1}.$$

Compte tenu de l'identité en loi de Paul Lévy $(|B_t|, L_t; t \geq 0) \overset{\text{loi}}{=} (S_t - B_t, S_t; t \geq 0)$, où $S_t \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$, les lois de l'arc sinus généralisé (7) et (8) s'écrivent encore :

$$\text{(9)} \qquad \int_0^1 1_{(B_s \geq (1-\mu)\, S_s)}\, ds \overset{\text{loi}}{=} G_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu}},$$

c'est-à-dire que le temps passé jusqu'à l'instant 1 par un mouvement brownien au-dessus d'un multiple de son supremum suit une loi béta,
et

$$\text{(10)} \qquad \text{conditionnellement à } \; B_1 = (1-\mu)\, S_1, \qquad \int_0^1 1_{(B_s \geq (1-\mu)\, S_s)}\, ds \overset{\text{loi}}{=} G_{1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu}}.$$

Dans le cas $\mu = 1$, on retrouve bien les lois de l'arc sinus (1) et (2) de P. Lévy. La méthode que nous avons utilisée en première approche pour parvenir aux résultats ci-dessus, est une variante de la formule de Feynman-Kac, employée conjointement avec des résultats de la théorie des excursions (cf. [N], et [T], partie I). Elle permet de calculer des expressions du type $\mathbb{E}\left[\exp - \int_0^T f(|B_s|, L_s)\, ds\right]$ où f est une fonction borélienne, et où T est un temps exponentiel de paramètre θ, indépendant du mouvement brownien B. On choisit une fonction f particulière, et on inverse la transformée de Laplace en θ. Cette méthode nous a permis d'obtenir d'autres lois béta faisant intervenir le dernier zéro avant l'instant 1 du mouvement brownien, le μ-processus du pont brownien, le méandre brownien ou encore le processus de Bessel de dimension 3 ([T], première partie, corollaire 2 et théorème 2). Par exemple :

Proposition 3. ([T], première partie, théorème 2)
Soient $(R_s)_{s \geq 0}$ un processus de Bessel de dimension 3, $J_t \equiv \inf_{s \geq t} R_s$ son infimum futur, et μ une constante strictement positive. Alors :

$$\text{(11)} \qquad \int_0^1 1_{(R_s + (\mu-1) J_s \geq \mu R_1)} ds \overset{\text{loi}}{=} U^{2\mu}\, G_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2}},$$

où U est une variable uniformément distribuée sur $[0,1]$ et indépendante de $G_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2}}$.

Par la suite, plusieurs théorèmes de type Ray-Knight (cf. [2] et [Y92], chapitres 8 et 9) décrivant les processus des temps locaux du μ-processus en différents temps aléatoires T nous ont permis de mieux comprendre ces diverses identités en loi (l'un de ces résultats avait été obtenu auparavant par J. F. Le Gall [LG86], mais nous présentons dans [2] une méthode complètement différente reposant sur la filtration des excursions) :
- $T = \tau_t^{\mu,a}$, l'inverse du temps local en 0 de $X^\mu = |B| - \mu L$ lorsque celui-ci est construit à partir d'un mouvement brownien B issu de $a \geq 0$ $(\tau^{\mu,0} \equiv \tau^\mu)$;
- $T = T_a^\mu$, le premier temps d'atteinte de $a \in \mathbb{R}^*$ par X^μ (si $a > 0$, $T_a^\mu = \tau_0^{\mu,a}$, et si $a < 0$, $T_a^\mu = \tau_{-a/\mu}$).

Citons en particulier :

Proposition 4. ([2], Théorème 3.2, et [Y92], Théorème 9.1)
Désignons par $(\tau_s^\mu)_{s\geq 0}$ *l'inverse continu à droite du temps local en* 0 *du* μ*-processus, noté* L^μ. *Soient* $\{L_t^+ \equiv (L_{\tau_t^\mu}^{\mu,x}; x \geq 0); t \geq 0\}$ *et* $\{L_t^- \equiv (L_{\tau_t^\mu}^{\mu,-x}; x \geq 0); t \geq 0\}$*, les processus des temps locaux du* μ*-processus considéré jusqu'en* τ_t^μ*. Ces deux processus, continus comme fonctions de* t*, prennent leurs valeurs dans l'espace* $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$*. Alors :*
i) les processus $(L_t^+; t \geq 0)$ *et* $(L_t^-; t \geq 0)$ *sont indépendants ;*
ii) pour tout $t > 0$*, la variable* L_t^+ *est distribuée comme un carré de Bessel de dimension* 0 *issu de* t *;*
iii) pour tout $t > 0$*, la variable* L_t^- *est distribuée comme un carré de Bessel de dimension* $2 - \frac{2}{\mu}$ *issu de* t*, et absorbé quand il touche* 0*.*

En conséquence, nous avons obtenu le résultat suivant, qui conjointement avec (6), est une extension du résultat de Barlow-Pitman-Yor (4) :

Proposition 5. ([2], Proposition 3.1)
i) Les processus $(A_{\tau_s^\mu}^{\mu,+})_{s\geq 0}$ *et* $(A_{\tau_s^\mu}^{\mu,-})_{s\geq 0}$ *sont indépendants.*
ii) Pour tout $s > 0$ *:*

$$\frac{1}{s^2}\, A_{\tau_s^\mu}^{\mu,+} \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{8\, G_{\frac{1}{2}}} \quad et \quad \frac{1}{s^2}\, A_{\tau_s^\mu}^{\mu,-} \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{8\, G_{\frac{1}{2\mu}}}. \tag{12}$$

De là, on peut adapter la méthode de D. Williams ([W69]) pour le cas $\mu = 1$, pour obtenir une preuve simple de la loi de l'arc sinus pour le μ-processus, preuve mettant en évidence le rôle clé joué par la propriété de scaling ([2], sections 2 et 3).

Par ailleurs, dans [2] (section 5), nous montrons que cette méthode permet d'obtenir une preuve élégante d'un résultat analogue sur les mouvements browniens (et de Bessel) de Walsh à n branches ([BPY89]). Dans le cas particulier $n = 2$, les "skew Bessel processes" font apparaître les variables $A_1^+ = \frac{p^{\frac{1}{\alpha}} T_\alpha}{p^{\frac{1}{\alpha}} T_\alpha + (1-p)^{\frac{1}{\alpha}} T'_\alpha}$, où T_α et T'_α sont deux variables stables d'indice α indépendantes. L'intérêt de ces variables, initialement introduites par J. W. Lamperti, réside entre autres dans le fait que S. Watanabe a montré que ce sont les seules limites en loi possibles, lorsque t tend vers l'infini, du temps passé positif normalisé, $\frac{1}{t}\int_0^t 1_{(X_s>0)} ds$, lorsque X est une diffusion généralisée ([Wa95]).

Il nous a alors paru logique d'étudier des processus liés au μ-processus ([2], section 4). En particulier, nous avons comparé les lois de $(X_s^\mu; 0 \leq s \leq 1)$ conditionné par $X_1^\mu = 0$ à celles de $(\frac{1}{\sqrt{\tau_1^\mu}}\, X_{s\tau_1^\mu}^\mu; 0 \leq s \leq 1)$ et de $(\pi_\mu(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{g_1^\mu}}\, X_{sg_1^\mu}^\mu; 0 \leq s \leq 1)$, où $g_1^\mu = \sup\{s < 1; X_s^\mu = 0\}$. De même, nous avons introduit le μ-processus du pont, i.e. $(q_\mu(s) = |p(s)| - \mu\, \lambda_s; 0 \leq s \leq 1)$, où p désigne un pont brownien standard et λ son temps local en 0. La plupart des résultats connus pour le mouvement brownien ([BLGY87], [PY98]) s'étendent au cas du μ-processus. Par exemple, nous avons obtenu l'extension suivante d'un résultat de Pitman-Yor [PY98] :

Proposition 6. ([2], Théorème 4.3)
Soient $\mu > 0$ et $\nu > 0$ tels que $\frac{1}{\nu} = 1 + \frac{1}{\mu}$. Considérons le ν-processus du pont brownien, c'est-à-dire le processus $(q_\nu(s) \equiv |p(s)| - \nu\,\lambda_s; 0 \leq s \leq 1)$, où p désigne le pont brownien standard et λ son temps local en 0. Considérons par ailleurs le μ-pont $(p_\mu(s); 0 \leq s \leq 1)$, i.e. le μ-processus $(X^\mu_s; 0 \leq s \leq 1)$ conditionné par $X^\mu_1 = 0$. Alors, les processus des temps locaux $(L^x_1(q_\nu); x \in \mathbb{R})$ et $(L^x_1(p_\mu); x \in \mathbb{R})$ ont même loi. En d'autres termes, pour toute fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, les variables $\int_0^1 f(|B_s| - \nu\, L_s)\, ds$ sachant $B_1 = 0$, et $\int_0^1 f(|B_s| - \mu\, L_s)\, ds$ sachant $|B_1| - \mu\, L_1 = 0$ ont même loi.

Par contre, les résultats faisant intervenir le dernier zéro g^μ_1 ne sont pas aussi simples que dans le cas $\mu = 1$ du mouvement brownien. En particulier, g^μ_1 et π_μ ne sont pas indépendants lorsque $\mu \neq 1$. Par contre, ils le sont, conditionnellement au minimum de π_μ (cf. [2], Proposition 4.8).

1.2 D'autres lois de l'arc sinus généralisé réalisées par le mouvement brownien doublement perturbé ([5])

Les lois de l'arc sinus généralisé (9) et (10) ne nous permettent pas de réaliser toutes les variables béta possibles, de paramètres $a > 0$ et $b > 0$. Afin d'obtenir de nouvelles généralisations, nous avons étudié, pour $\alpha < 1$ et $\beta < 1$, le processus $Y^{\alpha,\beta}$ solution de l'équation :

$$Y_t = B_t + \alpha\, S^Y_t - \beta\, I^Y_t\,,\ t \geq 0, \tag{13}$$

où $S^Y_t = \sup_{s \leq t} Y_s$ et $I^Y_t = \sup_{s \leq t}(-Y_s)$, B désignant toujours un mouvement brownien standard. Le cas $\alpha = 0$ correspond au mouvement brownien perturbé étudié jusqu'ici. Cette équation a d'abord été introduite par J. F. Le Gall [LG86]. Tout processus vérifiant l'équation (13) se comporte comme un mouvement brownien, sauf quand il atteint un nouvel extremum. C'est pourquoi, quand $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, on l'appelle mouvement brownien doublement perturbé, ou encore mouvement brownien perturbé en ses extrema. Dans [5], nous étudions le processus $Y^{\alpha,\beta}$, ou plus précisément, avec des notations évidentes, le triplet $(Y^{\alpha,\beta}, S^{\alpha,\beta}, I^{\alpha,\beta})$ qui, lui, est markovien, contrairement au processus $Y^{\alpha,\beta}$. Nous montrons que pour $\alpha \geq 1$ ou $\beta \geq 1$, l'équation (13) n'a pas de solution, et que, grâce à un théorème de point fixe, elle admet une unique solution (adaptée à la filtration du mouvement brownien B) sous la condition $|\alpha\,\beta| < (1-\alpha)(1-\beta)$. Par la suite, L. Chaumont et R. Doney [CD99], B. Davis [Da96], et M. Perman et W. Werner [PW97], ont montré que cette condition n'est pas nécessaire. Nous développons la méthode décrite dans [2] pour le μ-processus : ces nouvelles lois de l'arc sinus généralisé sont elles aussi une conséquence de théorèmes de type Ray-Knight ([5], section 3), et de la propriété de scaling de $Y^{\alpha,\beta}$ héritée du mouvement brownien B.

Les identités en loi (9) et (10) se généralisent de la façon suivante :

Proposition 7. ([5], Théorème 4.1)
Soit $Y^{\alpha,\beta}$ *l'unique solution de l'équation* (13). *Alors :*

$$\int_0^1 1_{(Y_s^{\alpha,\beta}\geq 0)}\, ds \stackrel{\text{loi}}{=} G_{\frac{1-\beta}{2},\frac{1-\alpha}{2}}. \tag{14}$$

et

$$\text{conditionnellement à } Y_1^{\alpha,\beta}=0, \qquad \int_0^1 1_{(Y_s^{\alpha,\beta}\geq 0)}\, ds \stackrel{\text{loi}}{=} G_{\frac{2-\beta}{2},\frac{2-\alpha}{2}}. \tag{15}$$

Et nous avons donc bien réalisé toutes les variables béta en termes de temps passés au-dessus de 0 par des mouvements browniens perturbés en leurs extrema.

Cette étude approfondie du mouvement brownien perturbé en ses extrema $Y^{\alpha,\beta}$ permet d'obtenir d'autres extensions. En particulier, en utilisant des notations évidentes, nous montrons que le couple $\frac{1}{L_T(Y)}(S_T^Y, I_T^Y)$ a même loi pour divers temps aléatoires T, et qu'il en est de même pour le triplet $\frac{1}{T}(A_T^+, A_T^-, L_T^2(Y))$ en d'autres temps aléatoires T ([5], Proposition 3.7 et Théorème 4.1). Cette dernière identité repose, entre autre, sur une relation d'absolue continuité entre le pont et le pseudo-pont de $Y^{\alpha,\beta}$. À noter que le travail fait dans [14] permet d'expliciter la loi du triplet $(Y_T^{\alpha,\beta}, S_T^{\alpha,\beta}, I_T^{\alpha,\beta})$ à temps exponentiel indépendant, donnant ainsi des résultats plus exploitables que dans [5].

Enfin, nous avons étendu la notion de mouvement brownien perturbé en ses extrema de la façon suivante :

$$Y_t^{\alpha,\beta} = B_t + \alpha(S_t^{\alpha,\beta}) - \beta(I_t^{\alpha,\beta}), \tag{16}$$

où cette fois, α et β sont des fonctions de classe C^1 telles que $\alpha(0)=\beta(0)=0$. Comme dans le cas du mouvement brownien doublement perturbé, on peut construire une unique solution forte de l'équation (16) sous la condition :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \alpha'(x) < 1,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \beta'(x) < 1, \quad \text{et} \quad \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}}|\alpha'(x)|}{1-\sup_{x\in\mathbb{R}}\alpha'(x)} \cdot \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}}|\beta'(x)|}{1-\sup_{x\in\mathbb{R}}\beta'(x)} < 1. \tag{17}$$

On obtient de la même façon des théorèmes de Ray-Knight concernant les processus des temps locaux de $Y^{\alpha,\beta}$ pris en l'inverse de son temps local en 0 ou en ses premiers temps d'atteinte ([D2], Propositions 2.2 et 2.3). Ils font apparaître des carrés de Bessel de dimension variable, processus qui ont été étudiés par Ph. Carmona dans sa thèse ([Car94], chapitre V et compléments).

1.3 Vers une meilleure compréhension de la seconde loi de l'arc sinus généralisé (8) à l'aide du mouvement brownien réfléchi perturbé ([10], [11], [14])

Jusque là, nous nous sommes attachés essentiellement à mieux comprendre l'extension (7) de la loi de l'arc sinus, laissant un peu de côté la seconde extension (8). Cette dernière a en fait été obtenue initialement ([T], partie I) sous la forme suivante :

$$\text{(18)} \qquad \int_0^g 1_{(|B_s| \le \mu L_s)}\, ds \overset{\text{loi}}{=} G_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2\mu}},$$

où $g \equiv \sup\{s \le 1; B_s = 0\}$ désigne le dernier zéro avant l'instant 1 du mouvement brownien B. L'identité en loi (8) découle des relations de l'algèbre béta-gamma et du fait que $(p(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} B_{gs}; 0 \le s \le 1)$ est un pont brownien indépendant de $g \overset{\text{loi}}{=} G_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Dans [10] (section 2), nous montrons que (18) est équivalente à :

$$\text{(19)} \qquad \forall\, u \ge 0,\ |B_{\alpha_u^{\mu,-}}| + \frac{1}{2} L^{\mu}_{\alpha_u^{\mu,-}} \equiv X^{\mu}_{\alpha_u^{\mu,-}} - \inf_{v \le u} X^{\mu}_{\alpha_v^{\mu,-}} + \frac{1}{2} L^{\mu}_{\alpha_u^{\mu,-}} \overset{\text{loi}}{=} R_u^{(\delta_\mu)},$$

où $R^{(\delta_\mu)}$ désigne un processus de Bessel de dimension $\delta_\mu \equiv 1 + \frac{1}{\mu}$, et où $\alpha_u^{\mu,\pm} \equiv \inf\{s; A_s^{\mu,\pm} > u\}$ est l'inverse continu à droite du temps passé au-dessus ou en dessous de 0 par le μ-processus. La méthode mise en œuvre ici est la suivante. Une fois de plus, grâce à la propriété de scaling du mouvement brownien, et à la représentation du pont brownien $(p(s); 0 \le s \le 1)$ à l'aide d'un mouvement brownien standard considéré jusqu'à l'instant g, on obtient :

Proposition 8. ([11], Proposition 1 et Corollaire 2)
Soit $(B_s; s \ge 0)$ un mouvement brownien réel, et $(A_t)_{t\ge 0}$ une fonctionnelle croissante adaptée à la filtration de B de la forme $A_t(\omega) = F_t(B(\omega))$, où $(F_t)_{t \ge 0}$ est un processus défini sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall\, w, \forall\, c > 0, \forall\, t \ge 0,\ F_{ct}(w) = c\, F_t(\frac{1}{\sqrt{c}} w_c)$, où $w_c(s) = w(cs)$.
Notons $\alpha_t \equiv \inf\{s; A_s > t\}$, l'inverse de A. Alors, si $\hat{T}$ désigne une variable stable unilatérale de paramètre $\frac{1}{2}$, indépendante de B :

$$\text{(20)} \qquad A_g \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{\alpha_1 + B^2_{\alpha_1} \hat{T}}.$$

Il s'ensuit que, si $A^{(p)} \equiv F_1(p)$, et si T est un temps exponentiel de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendant de B, et N une variable gaussienne centrée réduite indépendante du pont brownien p, on a :

$$\text{(21)} \qquad \mathbb{P}[|N| \sqrt{A^{(p)}} \ge x] = \mathbb{P}[T\, A_g \ge x^2] = \mathbb{E}[\exp(-\frac{x^2}{2}\alpha_1 - x|B_{\alpha_1}|)].$$

La connaissance du membre de droite de (21) permet d'obtenir alors les distributions d'un grand nombre de fonctionnelles du pont brownien (cf. [11], section 3), voire même, en étendant le résultat précédent, de ponts de Bessel de dimensions strictement inférieures à 2 ([11], section 4). Dans le cas particulier du temps passé au-dessous de 0 par le μ-processus, l'identité (20) s'écrit (cf. [10] section 2, ou [11] exemple 3) :

$$\int_0^g 1_{(|B_s| \le \mu L_s)}\, ds = A_g^{\mu,-} \overset{\text{loi}}{=} (1 + (|B_{\alpha_1^{\mu,-}}| + \frac{1}{2} L^\mu_{\alpha_1^{\mu,-}})^2\, \hat{T})^{-1}.$$

Pour montrer l'identité en loi (19), il reste alors à prouver que $(|B_{\alpha_1^{\mu,-}}| + \frac{1}{2} L^\mu_{\alpha_1^{\mu,-}})^2 \overset{\text{loi}}{=} 2\, G_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\mu}}$, ce que nous montrons d'abord directement en explicitant les moments des deux membres ([10], section 3). Nous introduisons donc les processus $(Z_s \equiv |B_{\alpha_s^{\mu,-}}| + \frac{1}{2} L^\mu_{\alpha_s^{\mu,-}}; s \ge 0)$ et $(\rho_s \equiv -X^\mu_{\alpha_s^{\mu,-}}; s \ge 0)$. Ce dernier est solution de l'équation suivante pour $\delta = \delta_\mu$ (cf. [T], partie I-5) :

$$\forall\, t \ge 0,\ \rho_t = \beta_t + (2-\delta)\, S_t^\rho + \frac{1}{2}\, l_t(\rho), \tag{22}$$

où $(\beta_t)_{t \ge 0}$ est un mouvement brownien standard, S_t^ρ désigne le maximum de ρ sur l'intervalle de temps $[0,t]$ et $l_t(\rho)$ son temps local en 0 à l'instant t. Alors le processus Z s'écrit : $Z_u = S_u^\rho - \rho_u + L_u^\rho$, où l'on a posé $L_u^\rho \equiv \frac{1}{2}\, l_u(\rho)$.

L'équation (22) a d'abord été introduite par J.F. Le Gall et M. Yor, [LGY90], à propos de problèmes d'enroulements du mouvement brownien. Tout processus solution, dit mouvement brownien réfléchi perturbé, se comporte comme un mouvement brownien réfléchi, sauf quand il atteint un nouveau maximum. Dans [CD99], L. Chaumont et R. Doney montrent que, pour tout $\delta > 1$ (donc tout $\mu > 0$), cette équation (22) admet une unique solution (adaptée au mouvement brownien β), et ils étudient ses liens avec l'équation (13) du mouvement brownien doublement perturbé. Notons que dans le cas $\mu = 1$, la solution ρ de (22) n'est autre qu'un mouvement brownien réfléchi. Notre étude nous a amené à montrer le résultat plus général suivant :

Proposition 9. ([10], Théorème 3)

$$\textit{pour tout } u > 0 \textit{ fixé}, \qquad (S_u^\rho, Z_u) \overset{\text{loi}}{=} (\frac{1}{2}\int_0^u \frac{ds}{R_s}, R_u), \tag{23}$$

où $(R_s; s \ge 0)$ désigne un processus de Bessel de dimension $1 + \frac{1}{\mu}$.

La preuve repose sur le résultat qui suit appliqué aux processus $X_t = Z_t$ et $X'_t = R_t$, avec $V_t = S_t^\rho$ et $V'_t = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s}$:

Proposition 10. ([P], Théorème 1.2)
Considérons un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien γ_t, et une $\mathcal{F}_t$-sous-martingale $X_t = \gamma_t + V_t$, où $(V_t)_{t\ge 0}$ est un processus continu croissant tendant vers l'infini. Notons $T_a = \inf\{s; V_s > a\}$

la famille des temps d'atteinte de V. De même, soit $X'_t = \gamma'_t + V'_t$ une autre sous-martingale, vérifiant les mêmes hypothèses.
On a alors l'équivalence entre les propriétés i) et ii) suivantes :
i) $\forall\, t > 0,\ (X_t, V_t) \overset{\text{loi}}{=} (X'_t, V'_t)$ *;*
ii) $\forall\, a > 0,\ (X_{T_a}, T_a) \overset{\text{loi}}{=} (X'_{T'_a}, T'_a)$.

L'étude du triplet $\xi_u \equiv (S^\rho_u, \rho_u, L^\rho_u)$ et non plus du couple (S^ρ_u, Z_u) s'imposait alors. Notons que $\xi_u \overset{\text{loi}}{=} \sqrt{u}\,\xi_1$, et que dès lors, une étude à temps exponentiel indépendant suffit. Dans [14] (sections 3 et 4), nous montrons comment la loi de ξ_t est reliée aux processus de Bessel de diverses dimensions. Dans le cas $\mu = 1$ du mouvement brownien réfléchi, on a le résultat suivant :

Proposition 11. ([RY99], chapitre XII, exercice 4.24, page 510)
Soient ρ un mouvement brownien réfléchi, $g_t \equiv \sup\{s \leq t; \rho_s = 0\}$, $S_t \equiv \sup_{s\leq t} \rho_s = m_t \vee M_t$, où $m_t \equiv \sup_{s\leq g_t} \rho_s$ et $M_t \equiv \sup_{g_t\leq s\leq t} \rho_s$. Soit enfin T, un temps exponentiel de paramètre $\frac{1}{2}$, indépendant de ρ. Alors :
i) (m_T, L_T) et (M_T, ρ_T) sont indépendants ;
ii) $\mathbb{P}[m_T \leq u, L_T \in dl] = \exp(-l\,\coth u)\, 1_{(u>0,l>0)}\, dl$ *;*
iii) $\mathbb{P}[M_T \in dy, \rho_T \in dx] = \frac{\text{sh}x}{(\text{sh}y)^2}\, 1_{(0<x\leq y)}\, dx\, dy$.

Voir aussi [13], section 3, où nous discutons en détail les lois des couples (m_T, L_T) et (M_T, ρ_T).

Dans [14], nous étudions le quadruplet $(S^{(\delta)}_T, m^{(\delta)}_T, L^{(\delta)}_T, \rho^{(\delta)}_T)$, avec des notations évidentes, lorsque $\rho^{(\delta)}$ est l'unique solution de l'équation (22) ($\delta > 1$). L'étude faite dans [2] sur le dernier zéro g^μ du μ-processus pouvait laisser penser que les résultats pour $\delta \neq 2$ (i.e. $\mu \neq 1$) seraient assez compliqués. Cependant, nous obtenons quelques expressions assez simples. En particulier :

Proposition 12. ([14], Théorème 5.4 et Proposition 5.11)
Soit T un temps exponentiel de paramètre $\frac{1}{2}$. La loi du triplet $(S^{(\delta)}_T, L^{(\delta)}_T, \rho^{(\delta)}_T)$ peut être décrite de la façon suivante :

$$(24)\qquad \Big(\frac{1}{\text{ch}\, S^{(\delta)}_T}, \frac{\text{sh}\, \rho^{(\delta)}_T}{\text{sh}\, S^{(\delta)}_T}\Big) \overset{\text{loi}}{=} (U^{\frac{1}{\delta-1}}, V),$$

où U et V désignent deux variables indépendantes uniformément distribuées sur $[0,1]$.
Pour toute fonction mesurable positive f :

$$(25)\qquad \mathbb{E}[f(\frac{1}{2}L^{(\delta)}_T\ \coth S^{(\delta)}_T)\, 1_{(S^{(\delta)}_T = M^{(\delta)}_T)}\, / S^{(\delta)}_T, \rho^{(\delta)}_T] = \frac{\text{th}\, \rho^{(\delta)}_T}{\text{th}\, S^{(\delta)}_T}\, \mathbb{E}\,[f(G_{\delta-1})]$$

et

$$\mathbb{E}[f(\frac{1}{2}L_T^{(\delta)}\ \coth S_T^{(\delta)})\, 1_{(M_T^{(\delta)}<S_T^{(\delta)})}\, / S_T^{(\delta)}, \rho_T^{(\delta)}] = \left(1 - \frac{\operatorname{th} \rho_T^{(\delta)}}{\operatorname{th} S_T^{(\delta)}}\right) \mathbb{E}\,[f(G_\delta)]. \tag{26}$$

Par injectivité de la transformée de Laplace et grâce à la propriété de scaling, nous obtenons alors plusieurs résultats à temps fixe. Les densités obtenues font intervenir des fonctions du type fonction Théta. En fait, nous obtenons la loi du quadruplet $(S_T^{(\delta)}, m_T^{(\delta)}, L_T^{(\delta)}, \rho_T^{(\delta)})$ ([14], Proposition 5.12). La méthode utilisée ici repose sur la construction de processus de Markov définis à partir du μ-processus et dont on peut expliciter le noyau de Lévy grâce à l'étude approfondie de ce même μ-processus faite auparavant (Lemmes 5.13 et 5.14).

1.4 Valeurs principales pour le μ-processus ([8])

Considérons une fonction mesurable $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\int_0^1 \frac{|\phi(a) - \phi(0)|}{a}\, da + \int_1^{+\infty} \frac{|\phi(a)|}{a}\, da < +\infty. \tag{27}$$

La valeur principale de Cauchy de ϕ est définie par :

$$v.p. \int_0^{+\infty} \frac{\phi(a)}{a}\, da = \int_0^1 \frac{\phi(a) - \phi(0)}{a}\, da + \int_1^{+\infty} \frac{\phi(a)}{a}\, da \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\phi(a)}{a}\, da + \phi(0)\, \ln \varepsilon \right).$$

La condition (27) est vérifiée pour toute application ϕ höldérienne à support compact. C'est le cas lorsque $(\phi(a) = L_t^a; a \geq 0)$ est la famille des temps locaux de certains processus stochastiques. Dans le cas du mouvement brownien standard, cette version est höldérienne d'ordre β pour tout $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ (théorème de Trotter). On peut donc définir en particulier

$$C_t^{\pm} = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \int_\varepsilon^\infty \frac{l_t^{\pm a}}{a} da + l_t^0\, \ln \varepsilon \}$$

$$C_t = C_t^+ - C_t^- = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \int_\varepsilon^\infty \frac{l_t^a - l_t^{-a}}{a} da \} = v.p. \int_{-\infty}^\infty \frac{l_t^a}{a} da$$

$$i.e.\ C_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \frac{ds}{B_s}\, 1_{(|B_s| \geq \varepsilon)} = v.p. \int_0^t \frac{ds}{B_s}.$$

Ces processus interviennent dans certains théorèmes limites pour des fonctionnelles additives du mouvement brownien (voir [Ya86]). La propriété de scaling du mouvement brownien leur confère des propriétés intéressantes en certains temps comme τ_t, l'inverse continu à droite du temps local en 0 du mouvement brownien, ou T_θ, un temps exponentiel indépendant de paramètre θ. Ainsi, dans [BY87], Ph. Biane et M. Yor ont obtenu, par application de la théorie des excursions du mouvement brownien, la loi conjointe de (C_{τ_t}, τ_t) à l'aide de la transformée de Fourier-Laplace :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{E}[\,\exp(i\xi C_{\tau_t} - \frac{\mu^2}{2}\tau_t)\,] = \exp(-\pi\, t\, \xi\, \coth(\frac{\pi \xi}{\mu})).$$

En particulier, $(\frac{1}{\pi}\, C_{\tau_t})_{t\geq 0}$ est un processus de Cauchy standard. Ils ont aussi obtenu les lois conjointes des valeurs principales à temps exponentiel indépendant, ainsi que pour d'autres processus liés au mouvement brownien, comme le pont, l'excursion brownienne normalisée, le méandre, ... P.J. Fitzsimmons et R.K. Getoor ont étendu le résultat aux cas des processus de Lévy symétriques ([FG92]), et J. Bertoin ([B90]) aux processus de Bessel de petite dimension (voir aussi [B95]). Pour le pseudo-pont brownien, voir [HSY98].
Compte tenu de l'existence de théorèmes de Ray-Knight pour le processus $(L_T^{\mu,a}; a \in \mathbb{R})$ des temps locaux du μ-processus $X^\mu = |B| - \mu\, L$ aux instants $T = \tau_t$ et $T = \tau_t^\mu$, il était logique de s'intéresser aux valeurs principales du mouvement brownien perturbé. Grâce à des calculs classiques sur les carrés de Bessel, nous avons explicité les transformées de Laplace :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} v.p. \int_0^T 1_{(X_s^\mu > 0)} \frac{1}{X_s^\mu}\, ds - \frac{\nu^2}{2} v.p. \int_0^T 1_{(X_s^\mu < 0)} \frac{1}{(-X_s^\mu)}\, ds - \beta\, L_T^\mu - \frac{\theta^2}{2} T\right)\right],$$

dans les deux cas $T = \tau_t^\mu$ et $T = \tau_t$ ([8], Propositions 1 et 3). Les expressions obtenues font intervenir des fonctions de Whittaker et sont bien sûr identiques au cas brownien en ce qui concerne le côté positif. Par contre, du côté négatif, aucun résultat simple n'apparaît. En particulier ([8], Corollaire 1.2), le processus $\left(v.p. \int_0^{\tau_t^\mu} 1_{(X_s^\mu < 0)}\, \frac{1}{(-X_s^\mu)}\, ds; t \geq 0\right)$ n'est un processus de Lévy que dans le cas $\mu = 1$.

Références

[BPY89] M. T. Barlow, J. W. Pitman et M. Yor. Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus. *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Math., vol. 1372, p. 294–314, Springer, Berlin, 1989.

[B90] J. Bertoin. Excursions of a $\mathrm{BES}_0(d)$ and its drift term $(0 < d < 1)$. *Probability Theory and Related Fields*, vol. 84, n° 2, p. 231–250, 1990.

[B95] J. Bertoin. On the Hilbert transform of the local times of a Lévy process. *Bull. Sci. Math.*, vol. 119, n° 2, p. 147–156, 1995.

[BLGY87] Ph. Biane, J. F. Le Gall et M. Yor. Un processus qui ressemble au pont brownien. *Séminaire de Probabilités XXII*, Lecture Notes in Math., vol. 1247, p. 270–275, Springer, Berlin, 1987.

[BY87] Ph. Biane et M. Yor. Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 111, p. 23–101, 1987.

[Car94] Ph. Carmona. Généralisations de la loi de l'arc sinus et entrelacements de processus de Markov. Thèse de doctorat de l'université Paris VI, mars 1994.

[CD99] L. Chaumont et R. A. Doney. Pathwise uniqueness for perturbed versions of Brownian motion and reflected Brownian motion. *Probability Theory and Related Fields*, vol. 113, n° 4, p. 519–534, 1999.

[Da96] B. Davis. Weak limits of perturbed random walks and the equation $Y_t = B_t + \alpha \sup_{s \le t} Y_s + \beta \inf_{s \le t} Y_s$. *Annals of Probability*, vol. 24, p. 2007–2023, 1996.

[Da97] B. Davis. Perturbed random walks and Brownian motions, and local times. *New York J. Math.*, 3A, Proceedings of the New York Journal of Mathematics Conference, June 9–13, 1997, p. 81–87 (electronic).

[Da99] B. Davis. Brownian motion and random walk perturbed at extrema. *Probability Theory and Related Fields*, vol. 113, p. 501–518, 1999.

[Do99] R. A. Doney. Some calculations for perturbed Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XXXII*, Lecture Notes in Math., vol. 1686, p. 231–236, Springer, Berlin, 1998.

[FG92] P. J. Fitzsimmons et R. K. Getoor. On the distribution of the Hilbert transform of the local time of a symmetric Lévy process. *Annals of Probability*, vol. 20, n° 3, p. 1484–1497, 1992.

[HSY98] Y. Hu, Z. Shi et M. Yor. Some applications of Lévy's area formula. *Biblioteca de la Revista Matemática Ibero-Americana,* p. 181–210, 1998.

[LG86] J. F. Le Gall. L'équation stochastique $Y_t = B_t + \alpha \sup_{s \leq t} Y_s + \beta \inf_{s \leq t} Y_s$ comme limite des équations de Norris-Rogers-Williams. Notes manuscrites, 1986.

[LGY86] J. F. Le Gall et M. Yor. Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* t. 303, Série I, p. 73–76, 1986.

[LGY90] J. F. Le Gall et M. Yor. Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 317, p. 687–722, 1990.

[L39] P. Lévy. Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio Mathematica*, vol. 7, p. 283–339, 1939.

[P96] M. Perman. An excursion approach to Ray-Knight Theorems for perturbed reflecting Brownian motions. *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 63, p. 67–74, 1996.

[PW97] M. Perman et W. Werner. Perturbed Brownian motions. *Probability Theory and Related Fields*, vol. 108, p. 357–383, 1997.

[PY92] J. W. Pitman et M. Yor. Arcsine laws and interval partitions derived from a stable subordinator. *Proc. London Math. Soc.*, vol. 65, n° 3, p. 326–356, 1992.

[PY98] J. W. Pitman et M. Yor. Random Brownian scaling identities and splicing of Bessel processes. *Annals of Probability*, vol. 26, n° 4, p. 1683–1702, 1998.

[RY99] D. Revuz et M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion.* Springer, third edition, 1999.

[SW95] Z. Shi et W. Werner. Asymptotics for occupation times of half-lines by stable processes and perturbed reflecting brownian motion. *Stochastics*, vol. 55, p. 71–85, 1995.

[T94] B. Tóth. 'True' self-avoiding walk with generalized bond repulsion in $\mathbb{Z}$. *J. Statist. Phys.*, vol. 77, p. 17–33, 1994.

[T95] B. Tóth. The 'True' self-avoiding walk with bond repulsion in $\mathbb{Z}$: limit theorems *Annals of Probability*, vol. 23, p. 1523–1556, 1995.

[T96] B. Tóth. Generalized Ray-Knight theory and limit theorems for self-interacting random walks on $\mathbb{Z}$. *Annals of Probability*, vol. 24, p. 1324–1367, 1996.

[Wa95] S. Watanabe. Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks. Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993), p. 157–172, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 57, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[W95] W. Werner. Some remarks on perturbed reflecting Brownian motions. *Séminaire de Probabilités XXIX*, Lecture Notes in Math., vol. 1613, p. 37–43, Springer, Berlin 1995.

[W69] D. Williams. Markov properties of Brownian local times. *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 76, p. 1035–1036, 1969.

[Ya86] T. Yamada. On limit theorems for occupation times of one dimensional Brownian motion and its continuous additive functionals locally of zero energy. *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 26-2, p. 309–322, 1986.

[Y92] M. Yor. Some aspects of Brownian motion. Part I : Some special functionals. Lect. Math., ETH Zürich : Birkhaüser, 1992.

2 Fonctionnelles exponentielles de processus de Lévy

Cette partie concerne les travaux [1], [6], [7], [9], [12] et [13].

Considérons un processus de Lévy bidimensionnel $(\xi_s, \eta_s; s \geq 0)$ issu de $(0,0)$, et la fonctionnelle exponentielle $A_t(\xi,\eta) \equiv \int_0^t e^{\xi_{s-}} d\eta_s$ qui lui est associée. Dans le cas où le processus η est égal au temps, on note simplement $A_t(\xi) \equiv \int_0^t e^{\xi_{s-}} ds$. Depuis le début des années 1990 surtout, la variable $A_t(\xi,\eta)$, et, quand elle existe, la variable $A_\infty(\xi,\eta)$, s'avèrent jouer un rôle important dans divers domaines scientifiques. La littérature est extrêmement abondante sur le sujet, et nous ne saurions ici être exhaustif.

2.1 Les fonctionnelles exponentielles sont partout : en voici quelques exemples

Voici quelques exemples auxquels nous nous sommes intéressés et qui prouvent, si besoin, l'importance des variables $A_t(\xi,\eta)$ et $A_t(\xi)$. Pour d'autres références, on peut se reporter à [12].

a. Théorie du risque et loi du prix d'une rente perpétuelle

Dans [D90], D. Dufresne établit la loi d'une "perpétuité", c'est-à-dire de la valeur actuelle Z d'une rente perpétuelle à paiement continu lorsque le taux de capitalisation est représenté par un mouvement brownien géométrique, i.e. lorsque Z s'écrit $\int_0^{+\infty} \exp(-(\sigma B_s + \nu s))ds$, $(\nu > 0)$. Il montre que Z est l'inverse d'une loi gamma, à une constante multiplicative près. M. Yor ([Y92]) a par la suite donné une démonstration élégante de ce résultat, s'appuyant sur la relation de Lamperti qui existe entre le mouvement brownien géométrique et les carrés de Bessel (voir 2.2.a).
Plus généralement, dans [Pa93], J. Paulsen introduit un modèle économique où le risque pour une compagnie d'assurance (c'est-à-dire la valeur future d'une série de risques pris individuellement) est donné par : $X_t = e^{\xi_t}(x + A_t(-\xi,\eta))$, où x représente l'avoir initial, e^{ξ_t} le taux de capitalisation et η le processus des bénéfices, les processus ξ et η n'étant plus nécessairement continus comme chez D. Dufresne. La variable $A_t(-\xi,\eta)$ désigne alors la valeur actuelle des bénéfices futurs sur $[0,t]$, et $A_\infty(-\xi,\eta)$, lorsqu'elle existe, est encore la valeur actuelle d'une rente perpétuelle. Cette dernière variable intervient par ailleurs dans le problème de la ruine d'un portefeuille d'assurance ([GP97], [12], section 3.2). Dans [NPa96], T. Nilsen et J. Paulsen s'intéressent au cas où η est un processus de Poisson composé. Dans [1] et [12], nous montrons comment ces divers résultats peuvent être unifiés à l'aide du processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé (cf. 2.2.a).

b. Calcul d'options

À la suite des travaux de D. Dufresne portant sur les perpétuités (cf. ci-dessus), mais aussi de questions de H. Geman et S. Jacka, M. Yor ([Y92]) s'est intéressé au calcul des options asiatiques. En mathématiques financières, dans un environnement de type Black-Scholes, le processus des prix s_t est modélisé par un mouvement brownien géométrique e^{ξ_t}, où (ξ_t) est un mouvement brownien avec drift, et il s'agit alors d'expliciter les moments de $e^{-\mu T}\,(\frac{1}{T}\int_0^T s_t\,dt - C)^+$, ou, ce qui revient au même compte tenu de la propriété de scaling du mouvement brownien, les moments de $(A_T^{(\nu)} - K)^+$, en notant $A_T^{(\nu)} \equiv A_T(\xi)$ dans le cas particulier $\xi_s = 2(B_s + \nu s)$. Le travail se fait à temps exponentiel indépendant. Nous renvoyons aussi à [BS94] et [GY93] pour plus de détails. Pour certains modèles financiers, le cas continu du mouvement brownien géométrique ne suffit plus, et il est fréquent de le remplacer par l'exponentielle d'un processus de Lévy. Dans [1], nous étudions le cas où $\xi_t = \alpha t + \varepsilon\, P_{N_t}$; α est le drift, $(P_{N_t}; t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé de paramètre $\beta > 0$ et de probabilité de saut $\lambda(dx) = \gamma e^{-\gamma x} 1_{(x>0)} dx$, $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Plus récemment, nous nous sommes intéressés dans [13] à deux types d'options exotiques, dépendant de la trajectoire, et faisant intervenir une barrière.
L'une

$$(A) \qquad \phi_t^{a,l}(K) = \mathbb{E}[1_{(L_t<l)}\,(\exp(aS_t) - K)^+]$$

pénalise trop de temps passé par le processus des prix ($s_t = \exp(B_t)$) dans un voisinage de 1 (plus généralement, le mouvement brownien B peut être remplacé par un mouvement brownien avec drift).
L'autre

$$(B) \qquad \psi_t^m(K) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t 1_{(\exp(B_s)\geq 1)} ds - K\right)^+ 1_{(S_t<m)}\right] = \mathbb{E}\big[(A_t^+ - K)^+ 1_{(S_t<m)}\big] \qquad (0 \leq K < t)$$

pénalise les grandes valeurs de s_t.
Ces études sont par ailleurs intéressantes d'un point de vue brownien, puisque nous avons dû par exemple considérer les lois de (S_t, B_t, L_t), de (A_t^+, S_t), voire de (B_t, L_t, L_t^x), S_t désignant toujours le maximum de B, A_t^+ le temps qu'il passe au-dessus de 0, L_t et L_t^x son temps local respectivement en 0 et en x. Nous donnons dans [13] plusieurs formules explicites, à temps exponentiel indépendant ou à temps fixe.

c. Diffusion en milieu aléatoire

Considérons une diffusion réelle X qui, conditionnellement au potentiel $(V_x = W_x + cx; x \in \mathbb{R})$, a pour générateur infinitésimal $\dfrac{1}{2}e^{V_x}\dfrac{d}{dx}\left[e^{-V_x}\dfrac{d}{dx}\right]$, c'est-à-dire que conditionnellement à V, X est la diffusion de fonction d'échelle $s_V(x) = \int_{-\infty}^x \exp(V_u)du$ $(c > 0)$ et de mesure de vitesse $m_V(dy) = 2\exp(-V_y)dy$. Dans le cas où $(W_x; x \geq 0)$ et $(W_{-x}; x \geq 0)$ sont deux mouvements browniens indépendants, il s'agit du modèle introduit par Brox ([B86]) de la version continue de la marche aléatoire de Sinaï. Dans [KT91], K. Kawazu et H. Tanaka s'intéressent au maximum de la diffusion dans ce cas de l'environnement brownien. On a alors :

$$\mathbb{P}[\max_{t\geq 0} X_t > x] = \mathbb{E}\left[\frac{\int_{-\infty}^{0} \exp(V_u)du}{\int_{-\infty}^{x} \exp(V_u)du}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{A_\infty^{(-2c)}}{A_\infty^{(-2c)} + \hat{A}_{x/4}^{(2c)}}\right],$$

où les deux variables considérées dans le membre de droite sont indépendantes. Dans [HSY99], Y. Hu, Z. Shi et M. Yor complètent les travaux de K. Kawazu et H. Tanaka en utilisant une nouvelle approche faisant intervenir les processus de Bessel et de Jacobi pour l'étude des potentiels aléatoires.
Le cas général d'un potentiel de Lévy est étudié dans [6], et dans [Car97], Ph. Carmona détermine alors le comportement de $\frac{X_t}{t}$.
D'un point de vue physique, la fonctionnelle exponentielle $\tau(a,b) = \int_a^b dx\ \exp(-\beta \int_a^x F(y)dy)$ joue un rôle fondamental dans l'étude des diverses grandeurs qui permettent d'étudier la diffusion d'une particule sur un milieu désordonné en présence d'une force aléatoire gelée F (voir les travaux de A. Comtet et C. Monthus, [M95] et [CM98] où, par exemple, l'énergie libre $\ln A_L^{(-\mu)}$ est étudiée).

d. Équations affines et variables auto-décomposables

Le couple (A, B) de variables aléatoires étant donné, peut-on trouver des variables Y telles que $Y \overset{\text{loi}}{=} AY + B$, où, dans le membre de droite, Y est indépendante de (A, B) ? H. Kesten ([K73]) et W. Vervaat ([V79]) par exemple se sont tout particulièrement intéressés à ce problème des équations affines. L'existence de solutions est reliée à la convergence des équations aux différences $Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n$ qui apparaissent dans de nombreux domaines. Parmi les sujets déjà abordés précédemment, citons en physique la marche aléatoire en milieu désordonné ([M95]), et en économie pour modéliser le cours de certains produits financiers ([D90], [Pa93]). Mais on retrouve également ces équations en biologie ou en sociologie. Dans toutes les applications, Y_n représente un stock de certains objets au temps n, B_n la quantité qu'on ajoute (ou retranche si $B_n < 0$) au temps n, et A_n indique la façon dont le stock Y_{n-1} évolue entre les instants $n-1$ et n. Les exponentielles de processus de Lévy fournissent alors des exemples de solutions d'équations affines. La variable $A_\infty(\xi)$ est en effet solution avec $A = e^{\xi_T}$ et $B = A_T(\xi)$, lorsque T est un temps d'arrêt pour le processus de Lévy ξ.
Inversement, on dit qu'une variable aléatoire positive X est auto-décomposable si :

$$\forall c > 0,\ \exists X_c,\ X \overset{\text{loi}}{=} X_c + e^{-c}X,$$

où, dans le membre de droite, les variables X et X_c sont indépendantes. Une telle variable X est indéfiniment divisible.
Si ξ est un processus de Lévy sans sauts négatifs, la variable $A_\infty(\xi)$ est auto-décomposable :

$$\forall a < 0,\ A_\infty(\xi) \overset{\text{loi}}{=} A_{T_a}(\xi) + e^a\,\tilde{A}_\infty,$$

où T_a désigne le premier temps d'atteinte de a par ξ.

Z. Jurek et W. Vervaat ([JV83]) ont montré que toute variable auto-décomposable X se représente sous la forme $A_\infty(\xi,\eta)$ avec $\xi_s = -s$ et η un subordinateur : η s'appelle le "background driving Lévy process" associé à X.

Le cas du processus de Poisson avec drift $\xi_t = aN_t - ct$ fournit des exemples intéressants de solutions d'équations affines (voir 2.1.f et 2.2.a).

e. Asymptotiques de certains processus semi-stables

Proposition 13. ([6], Proposition 4.2)
Si ξ est un processus de Lévy α-stable, alors :

$$\frac{1}{t^{1/\alpha}} \ln(A_t(\xi)) \overset{\mathrm{d}}{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}} \sup_{s\leq 1} \xi_s.$$

Ce type de résultat est de même nature que celui qui intervient dans la preuve du théorème de Spitzer sur le nombre de tours du mouvement brownien plan.

f. Le processus de Poisson

Outre le cas du mouvement brownien avec drift, l'autre cas simple, mais néanmoins intéressant, de processus de Lévy, est celui où $\xi_t = -ct + aN_t$, $(N_t)_{t\geq 0}$ étant un processus de Poisson. Dans [6], nous étudions en détail la fonctionnelle exponentielle $A_\infty(\xi)$ qui lui est associée : résultats asymptotiques pour les variables $A_t(\xi)$ (Proposition 6.1), équations affines (Proposition 6.3) et calculs de moments (Proposition 6.4) pour les variables $A_\infty(\xi)$, lorsqu'elles existent. Dans le cas sans drift ($c = 0$), nous nous intéressons aux fonctionnelles $A_\infty(h) = \int_0^\infty h(N_s)ds$, pour une large classe de fonctions h : transformée de Laplace, densité, moments de type "options asiatiques" (Proposition 6.5). Le cas exponentiel $A_\infty = \int_0^\infty q^{N_s} ds$, qui correspond à la fonction $h(x) = q^x$, $0 < q < 1$, apparaît dans de nombreux papiers. Dans [BBY03], J. Bertoin, Ph. Biane et M. Yor en prouvent entre autres le caractère auto-décomposable (voir aussi [BY02a], où la variable A_∞ fournit un exemple explicite montrant que la loi log-normale n'est pas déterminée par ses moments, ou encore la discussion et les références dans [BY03]). La loi de A_∞ apparaît comme une mesure invariante liée à l'étude de la congestion de réseaux de communication (TCP) (voir [DGR02] et [GRZ03]). Elle intervient dans l'étude du temps minimal passé pour récupérer des objets disposés uniformément sur un cercle ([LZ03]), et joue aussi un rôle dans une modélisation probabiliste de duplication de l'ADN ([La03]).

2.2 Méthodes mises en œuvre et autres exemples d'application

Les méthodes principalement développées dans ces différents papiers sont les suivantes.

a. La transformation de Lamperti

La notion de processus de Markov semi-stable a été introduite par J. W. Lamperti en 1972 ([La72]). Un processus de Markov $(X(t); t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est dit semi-stable si, en désignant par P_x sa loi lorsqu'il est issu de x, on a :

$$\forall c > 0, \forall x > 0, (\frac{1}{c}X(ct), t \geq 0; P_{cx}) \overset{\text{loi}}{=} (X(t), t \geq 0; P_x).$$

J.W. Lamperti a mis en évidence le lien entre les processus de Markov semi-stables et les processus de Lévy en utilisant un changement de temps. Plus précisément, à tout processus de Lévy réel ξ, on peut associer un unique processus de Markov semi-stable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ tel que :

$$(28)\ \ \forall t \geq 0,\ \exp(\xi_t) = X_{A_t(\xi)},\ \text{ et } T_0(X) = A_\infty(\xi) \text{ où } T_0(X) \equiv \inf\{u; X_u = 0 \text{ ou } X_{u-} = 0\}.$$

Réciproquement, à tout processus de Markov semi-stable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on peut associer un processus de Lévy réel ξ tel que l'équation (28) soit vérifiée, ce qui peut encore s'écrire :

$$(29)\qquad \forall u < T_0(X),\ X_u = \exp(\xi_{C_u}) \text{ où } C_u = \inf\{s; A_s(\xi) > u\} = \int_0^u \frac{ds}{X_s}.$$

Les générateurs infinitésimaux de ξ et X sont liés par la relation :

$$L^X f(x) = \frac{1}{x} L^\xi (f \circ \exp)(\ln x) \quad \text{et} \quad L^\xi f(z) = e^z\, L^X (f \circ \ln)(e^z).$$

Par exemple, lorsque $\xi_t = 2(B_t - \nu t)$ est un mouvement brownien avec drift ($\nu > 0$), on reconnaît pour L^X le générateur infinitésimal du carré de processus de Bessel de dimension $2(1-\nu)$. Dans ce cas, la transformation de Lamperti s'écrit :

$$\forall t \geq 0, \quad \exp[2(B_t - \nu t)] = R^{(2(1-\nu))}(\int_0^t \exp[2(B_s - \nu s)]ds),$$

où $R^{(\alpha)}$ est un carré de Bessel de dimension α issu de 1. Ce qui entraîne :

$$A_\infty(\xi) \overset{\text{loi}}{=} T_0(R^{(2(1-\nu))}) \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{2G_\nu},$$

par le théorème de Getoor (cf. [Y92]).

Un autre exemple est celui des martingales d'Azéma-Émery :

Proposition 14. ([6], Lemme 6.9 et section 2, exemple C)
Soit Y la martingale d'Azéma-Émery de paramètre $\beta > -1$, c'est-à-dire la solution de l'équation de structure

$$d[Y,Y]_t = dt + \beta\, Y_{t-}\, dY_t.$$

Posons $\xi_t = 2(\ln(1+\beta)N_t - \beta t)$, où N désigne un processus de Poisson de paramètre 1. Alors :

$$T_0(Y) \overset{\text{loi}}{=} \beta^2 A_\infty(\xi),$$

où $T_0(Y)$ désigne le temps d'atteinte de 0 par Y.

Pour une extension de la relation de Lamperti à des processus X non nécessairement positifs, voir les travaux de L. Gallardo et M. Yor ([GaY03]) sur les processus de Dunkl.

b. Transformation d'Esscher-Girsanov, calcul à temps exponentiel indépendant et entrelacements de semi-groupes

Proposition 15. ([1], Propositions 2.1 et 2.2)
a. Soit ξ un processus de Lévy réel issu de 0 de filtration naturelle $(\mathcal{G}_t)$ et d'exposant de Lévy ψ. Soit X le processus de Markov semi-stable associé à ξ par la transformation de Lamperti. Soit m un réel tel que $\psi(m)$ soit fini. Considérons la transformation de Girsanov suivante, dite transformation d'Esscher-Girsanov :

$$\mathbb{P}_a^{(m)} = \exp(m(\xi_t - a) - t\psi(m)).\mathbb{P}_a \quad sur\ \mathcal{G}_t.$$

Sous $\mathbb{P}_a^{(m)}$, le processus ξ est un processus de Lévy dont l'exposé de Lévy est donné par $\psi^{(m)}(\lambda) = \psi(m+\lambda) - \psi(m)$. Le processus de Markov semi-stable $X^{(m)}$ qui lui est associé est en fait le processus X considéré sous la nouvelle probabilité :

$$P_x^{(m)} = (\frac{X_u}{x})^m \exp(-\psi(m)C_u).P_x \quad sur\ \mathcal{F}_u = \mathcal{G}_{C_u}.$$

b. Soient $\lambda > 0$ et m tels que $\lambda = \psi(m)$. Si T_λ désigne un temps exponentiel de paramètre λ indépendant, on a alors :

$$\forall u \geq 0,\ \mathbb{P}_0[\, A_{T_\lambda}(\xi) > u\,] = E_1^{(m)}[\frac{1}{X_u^m}].$$

La connaissance du semi-groupe de $X^{(m)}$ permet d'obtenir la loi de $A_{T_\lambda}(\xi)$, et même du couple $(\exp \xi_{T_\lambda}, A_{T_\lambda}(\xi))$.

Proposition 16. ([1], Proposition 2.2)
Considérons, quand elle existe, la famille de variables aléatoires (H_p) *définie par :*

$$P[H_p \;>\; t] \;=\; E_1[X_t^{-p}].$$

Bien entendu, $(H_p^{(m)})$ *désigne la famille associée au transformé de Girsanov* $X^{(m)}$.
Soit $\lambda > 0$ *tel qu'il existe* m *vérifiant* $\psi(m) = \lambda$.
Alors $H_m^{(m)}$ *existe et on a :*

$$A_{T_\lambda}(\xi) \stackrel{\text{loi}}{=} H_m^{(m)}.$$

Un moyen simple pour déterminer les familles (H_p), et par voie de conséquence la loi de $A_{T_\lambda}(\xi)$ est d'utiliser la notion d'entrelacement entre deux processus de Markov. Cette notion, importante en théorie des opérateurs, est beaucoup moins familière en théorie des probabilités. Elle apparaît déjà néanmoins chez E. B. Dynkin ([Dy65]) et chez Pitman-Rogers ([PR81]), et a par la suite été utilisée dans [MY00] et [MY01], où H. Matsumoto et M. Yor présentent des exemples de semi-groupes de processus liés au mouvement brownien géométrique $e^{2(B_s+\nu s)}$ et à la fonctionnelle exponentielle $A_t^{(\nu)}$, entrelacés à l'aide de noyaux dans lesquels interviennent des lois gaussiennes inverses généralisées. Pour d'autres exemples, on peut aussi citer les travaux de Ph. Biane ([Bi95]) et de J. Dubédat ([Du03]), ou encore ceux de L. Gallardo et M. Yor ([GaY03]) sur les martingales de Dunkl.

Définition. On dit que deux semi-groupes $(P_t)_{t\geq 0}$ et $(Q_t)_{t\geq 0}$ sont entrelacés par le noyau markovien Λ si : $\forall\, t \geq 0,\ P_t\Lambda = \Lambda Q_t$.

Dans les exemples que nous avons étudiés, Λ est un noyau multiplicatif associé à une variable aléatoire positive G, c'est-à-dire : $\forall\, f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\Lambda f(x) = \mathbb{E}[f(Gx)]$. Les variables G considérées sont essentiellement des variables gamma, béta ou leurs inverses, voire des quotients de variables gamma indépendantes, et la relation d'entrelacement peut être vue comme une extension, au niveau des semi-groupes, des identités bien connues entre variables béta et gamma (voir les rappels).

Proposition 17. ([1], Proposition 3.1)
Soient deux processus de Markov semi-stables X *et* Y *de semi-groupes respectifs* $(P_t)_{t\geq 0}$ *et* $(Q_t)_{t\geq 0}$ *entrelacés à l'aide du noyau de multiplication par* G.
Considérons, quand elles existent, les familles de variables aléatoires (H_p) *et* (K_p) *définies par :* $P[H_p > t] = E_1[X_t^{-p}]$ *et* $P[K_p > t] = E_1[Y_t^{-p}]$.
Soit p *tel que* $\mathbb{E}[G^{-p}]$ *soit finie. Si* H_p *ou* K_p *existe, alors* H_p *et* K_p *existent et par exemple :*

(30) $$\text{si } G = G_a : \forall p < a,\ H_p \stackrel{\text{loi}}{=} G_{a-p}\, K_p\,;\ \text{si } G = G_{a,b} : \forall p < a,\ H_p \stackrel{\text{loi}}{=} G_{a-p,b}\, K_p.$$

La connaissance pour deux processus de Markov semi-stables de leur famille associée (H_p) permet d'expliciter la loi de $A_{T_\lambda}(\xi)$.
Notre étude du mouvement brownien perturbé a fait apparaître divers processus de Markov semi-stables comme $(X^{(\alpha)}(t) \equiv |B_{\tau_t^\mu}|; t \geq 0)$, dit processus de Watanabe généralisé $(\alpha = \frac{1}{\mu})$, et $(X^{(1,\beta)}(t) \equiv t + \sup_{s \leq \tau_{t\beta}} (|B_s| - \frac{1}{\beta} l_s); t \geq 0)$. Ils sont étudiés ainsi que les processus auxquels ils sont liés par entrelacement dans [1] et [9]. C'est ainsi qu'apparaît la classe des processus de Lévy de la forme $\xi_t = at + \varepsilon P_{N_t}$ (où P_N est un processus de Poisson composé, voir 2.1.b).
La notion d'entrelacement nous a permis de mettre en évidence des liens entre différents processus de Markov, qui, a priori, ne semblaient pas être reliés les uns aux autres. Ces processus de Markov et les processus de Lévy associés peuvent être des exemples pour modéliser les processus de prix en mathématiques financières.

c. La méthode des moments

Proposition 18. ([6], Propositions 3.1 et 3.3)
Soit ξ un processus de Lévy et soit ϕ la fonction définie par : $\mathbb{E}[\exp(\lambda \xi_t)] = \exp(-t\phi(\lambda))$.
i) Si $\lambda \geq 1$ et $\phi(\lambda) > 0$, alors :

$$\mathbb{E}[\, A_\infty(\xi)^\lambda \,] = \frac{\lambda}{\phi(\lambda)} \mathbb{E}[\, A_\infty(\xi)^{\lambda - 1} \,].$$

ii) Si ξ est l'opposé d'un subordinateur sans drift (ϕ est l'exposant de Laplace de $-\xi$), la loi de $A_\infty(\xi)$ est caractérisée par ses moments, et :

$$\forall n \in I\!N, \ \mathbb{E}[\, A_\infty(\xi)^n \,] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n} \phi(j)}.$$

Par cette méthode (ii), on peut déterminer la mesure de dislocation du processus de fragmentation d'indice $\alpha = -\frac{1}{2}$ qui consiste à regarder les longueurs des morceaux d'une excursion brownienne normalisée au-dessus du temps t (cf. [Be02]).
Dans [BY01], J. Bertoin et M. Yor utilisent le résultat (ii) pour obtenir diverses décompositions de la variable exponentielle en produits de variables indépendantes de la forme $RA_\infty(\xi)$, et ils relient R au processus de Markov semi-stable associé au subordinateur ξ.
J. Bertoin et M.E. Caballero montrent dans [BC02] que, si X est le processus de Markov semi-stable associé à un subordinateur d'espérance finie, $P_x[X_1 \in .]$ converge, quand x tend vers 0, vers une loi d'entrée $P_{0+}[X_1 \in .]$, et ils utilisent le résultat (ii) pour caractériser les moments $E_{0+}[X_1^{-k}]$ et relier la loi limite à celle de $A_\infty(\xi)$. Le cas général est traité dans [BY02b] où des résultats analogues à (ii) sont démontrés pour caractériser la loi de $\frac{1}{A_\infty(\xi)}$ par ses moments sous certaines conditions.

Signalons aussi un article récent de T. Szabados et B. Székely ([Sz03]) qui présente une formule analogue pour les moments d'une fonctionnelle exponentielle discrète (i.e. associée à une marche aléatoire) permettant de retrouver les résultats de D. Dufresne et M. Yor sur les options asiatiques $A_\infty^{(-\nu)}$.

En ce qui concerne le temps fini, nous donnons dans [7] une majoration des moments entiers de $A_t(\xi)$ en fonction de l'exposant de Lévy de ξ :

Proposition 19. ([7], Proposition 1)
Soit ξ un processus de Lévy. On suppose que son exposant de Lévy ψ satisfait à la condition : $\lambda \mapsto \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}$ est une fonction finie, positive croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Alors :

$$\forall n \in I\!N,\ \mathbb{E}[A_t(\xi)^n] \leq \left(\frac{\exp(t\psi(n)/n) - 1}{\psi(n)/n}\right)^n.$$

Dans le cas particulier où ξ est le mouvement brownien avec drift, cela nous permet de démontrer une conjecture de V. de la Peña et N. Eisenbaum ([EP92]).

d. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètre λ est un processus de Markov, unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$dU_s = dB_s + \lambda\, U_s\, ds,$$

où $(B_s)_{s\geq 0}$ est un mouvement brownien standard.
Un calcul classique donne : $U_t = \exp(\lambda t)(x + \int_0^t \exp(-\lambda s) dB_s)$.
Cette définition s'étend de la façon suivante.

Proposition 20. ([6], Lemme 2.3, Corollaire 5.2)
Soit (ξ, η) un processus de Lévy bidimensionnel issu de $(0, 0)$.
i) On appelle processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé associé à (ξ, η) le processus

$$X_t^x(\xi, \eta) = e^{\xi_t}(x + A_t(-\xi, \eta)),\ t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

C'est un processus de Markov homogène.
ii) Lorsque $\eta_s = s$, son générateur satisfait :

$$L^U f(x) = f'(x) + L^\xi(f \circ \exp)(\ln x).$$

iii) Lorsque ξ et η sont indépendants, on a :

$$\forall t > 0,\ X_t^x(\xi, \eta) \stackrel{\text{loi}}{=} xe^{\xi_t} + A_t(\xi, \eta).$$

Si de plus, ξ_t tend vers $-\infty$ p.s. et si $A_\infty(\xi,\eta)$ existe et est presque sûrement finie, alors la loi de $A_\infty(\xi,\eta)$ est l'unique mesure de probabilité invariante du processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé associé à (ξ,η).

En conséquence, si L^U est le générateur infinitésimal du processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé associé à (ξ,η), et si $\lambda(dx)$ est une mesure de probabilité vérifiant :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^2, \quad \int L^U f(x)\,\lambda(dx) = 0,$$

alors $\lambda(dx)$ est la loi de $A_\infty(\xi,\eta)$.
Les lois des fonctionnelles exponentielles $A_\infty(\xi)$ ou $A_\infty(\xi,\eta)$ s'obtiennent alors aisément. En particulier, on retrouve les résultats que Nilsen-Paulsen ([NPa96]) avaient obtenus par la méthode de Feynman-Kac (le processus d'Ornstein-Uhlenbek généralisé correspond exactement au risque étudié par Nilsen-Paulsen), ainsi que ceux pour les processus de Lévy de la forme $\xi_t = at + \varepsilon\, P_{N_t}$ (voir 2.1.b et 2.2.b) étudiés dans [1]. Cette méthode permet aussi de trouver la loi de $A_\infty(\xi,\eta)$ lorsque ξ et η sont des mouvements browniens dépendants avec drift, et c'est encore de cette manière que nous avons identifié le processus de Lévy associé à la valeur absolue d'un processus de Cauchy ([12], Proposition 2.3). Cette technique se généralise ([DGY01]) au cas multi-dimensionnel de la loi de $\left(\int_0^\infty e^{a_i B_s - b_i s}\,ds\right)_{1\leq i\leq n}$, mais, pour $n \neq 1$, on ne sait pas résoudre les équations obtenues. Quelques résultats bidimensionnels apparaissent cependant dans [12] (section 4 : $a_1 = a_2 = 2$, $b_1 = \nu$, $b_2 = \nu + \alpha$) et surtout dans [Y92] ($a_1 = -a_2 = 2$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$).

Pour finir, citons encore deux exemples où le caractère markovien du processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé joue un rôle fondamental : dans [DGY01], pour retrouver le prix des options asiatiques à temps exponentiel indépendant $\mathbb{E}[(A_T^{(\nu)} - K)^+]$, et dans [ADY97] pour démontrer et généraliser une identité en loi due à Ph. Bougerol ([Bo83])

$$\forall t \geq 0,\ \mathrm{sh}(B_t) \overset{\text{loi}}{=} W_{A_t^{(0)}},$$

où, dans le membre de droite, W est un mouvement brownien indépendant de celui qui apparaît dans la fonctionnelle exponentielle $A_t^{(0)}$.

Références

[ADY97] L. Alili, D. Dufresne et M. Yor. Sur l'identité de Bougerol pour les fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien avec drift. Exponential functionals and principal values related to Brownian motion, 3–14, *Rev. Mat. Iberoamericana*, Madrid, p. 3–14, 1997.

[Be02] J. Bertoin. Self-similar fragmentations. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 38 (3), p. 319–340, 2002.

[BBY03] J. Bertoin, Ph. Biane et M. Yor. Poissonian exponential functionals, q-series, q-integrals, and the moment problem for log-normal distribution. À paraître dans *Proceedings Stochastic Analysis, Ascona*, Birkhaüser, 2003.

[BC02] J. Bertoin et M. E. Caballero. Entrance from 0+ for increasing semi-stable Markov processes. *Bernoulli*, 8, n° 2, p. 195–205, 2002.

[BY01] J. Bertoin et M. Yor. On subordinators, self-similar Markov processes and some factorizations of the exponential variable. *Elect. Comm. in Probab.*, (6), p. 95–106, 2001.

[BY02a] J. Bertoin et M. Yor. On the entire moments of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, (6), vol. XI, n° 1, p. 33–45, 2002.

[BY02b] J. Bertoin et M. Yor. The entrance laws of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. *Potential Anal.*, 17, p. 389–400, 2002.

[BY03] J. Bertoin et M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes. En préparation, 2003.

[Bi95] Ph. Biane. Intertwinings of Markov semi-groups, some examples. *Sém. Probab.*, XXIX, p. 30–36, 1995.

[BS94] J. P. Bouchaud et D. Sornette. The Black-Scholes option pricing problem in mathematical finance : Generalization and extensions for a large class of stochastic processes. *J. Phys. I France*, vol. 4, p. 863–881, 1994.

[Bo83] Ph. Bougerol. Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 19 (4), p. 369–391, 1983.

[B86] Th. Brox. A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium. *Ann. Proba.*, vol. 14-4, p. 1206–1218, 1986.

[Car97] Ph. Carmona. The mean velocity of a Brownian motion in a random Lévy potential. *Ann. Proba.*, vol. 25 (4), p. 1774–1788, 1997.

[CM98] A. Comtet et C. Monthus. Exponential Functionals of Brownian motion and disordered systems. *J. Appl. Prob.*, vol. 35, p. 255–271, 1998. *Exponential Functionals of Brownian Motion and Related processes*, Springer, 2001.

[DGY01] C. Donati-Martin, R. Ghomrasni et M. Yor. On certain Markov processes attached to exponential functionals of Brownian motion ; application to Asian options. *Rev. Mat. Iberoamericana* 17, n° 1, p. 179–193, 2001.

[Du03] J. Dubédat. Reflected planar Brownian motions, intertwining relations and crossing probabilities. *arXiv :math.PR/0302250 v1*, 20 février 2003.

[D90] D. Dufresne. The distribution of a perpetuity, with application to risk theory and pension funding. *Scand. Actuar. J.*, p. 39–79, 1990.

[D98] D. Dufresne. Algebraic properties of beta and gamma distributions, and applications. *Adv. in Appl. Math.*, 20, n° 3, p. 285–299, 1998.

[DGR02] V. Dumas, F. Guillemin et Ph. Robert. A Markovian analysis of additive-increase multiplicative-decrease algorithms. *Adv. in Appl. Probab.*, 34, n° 1, p. 85–111, 2002.

[Dy65] E. B. Dynkin. *Markov processes.* Vol. I, Springer, 1965.

[EP92] N. Eisenbaum et V. de la Peña. Exponential Burkholder-Gundy inequalities. *Bull. Londom Math. Soc.*, vol. 29, p. 239–242, 1992.

[GaY03] L. Gallardo et M. Yor. Quelques propriétés remarquables des martingales de Dunkl. En préparation, 2003.

[GY93] H. Geman et M. Yor. Asian options and perpetuities. *Math. Finance*, vol. 3-4, p. 349–375, 1993.

[GP97] H. Gjessing et J. Paulsen. Ruin theory with stochastic return on investments. *Adv. Appl. Probab.*, vol. 29-4, p. 965–958, 1997.

[GRZ03] F. Guillemin, Ph. Robert et B. Zwart. AIMD algorithms and exponential functionals. À paraître dans *Ann. Probab.*, 2003.

[HSY99] Y. Hu, Z. Shi et M. Yor. Rates of convergence of diffusions with drifted Brownian potentials. *Trans. Amer. Math. Soc. 351*, n° 10, p. 3915–3934, 1999.

[JV83] Z. Jurek et W. Vervaat. An integral representation for self-decomposable Banach space valued random variables. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* vol. 62, n° 2, p. 247–262, 1983.

[KT91] K. Kawazu et H. Tanaka. On the maximum of diffusion process in a drifted Brownian environment. *Séminaire de Probabilités XXVII*, Lecture Notes in Math., vol. 1557, p. 78–85, Springer, Berlin, 1991.

[K73] H. Kesten. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.*, vol. 131, p. 207–248, 1973.

[La03] A. Lachal. Some probability distributions in modeling DNA replication. *Ann. Appl. Probab.*, vol. 13, n°3, p. 1207–1230, 2003.

[La72] J. W. Lamperti. Semi-stable Markov processes. *Zeit. Für. Wahr.*, vol. 22, p. 205–225, 1972.

[LZ03] N. Litvak et W. R. van Zwet. On the minimal travel time needed to collect n items on a circle. Prépublication, 2003.

[MY00] H. Matsumoto et M. Yor. An analogue of Pitman's $2M - X$ theorem for exponential Wiener functionals. Part I. A time-inversion approach. *Nagoya Math. J.*, vol. 159, p. 125–166, 2000.

[MY01] H. Matsumoto et M. Yor. An analogue of Pitman's $2M - X$ theorem for exponential Wiener functionals. Part II. The role of the generalized inverse Gaussian laws. *Nagoya Math. J.*, vol. 162, p. 65–86, 2001.

[M95] C. Monthus. Étude de quelques fonctionnelles du mouvement brownien et de certaines propriétés de la diffusion unidimensionnelle en milieu aléatoire. Thèse de doctorat. Université Paris VI. Janvier 1995.

[NPa96] T. Nilsen et J. Paulsen. On the distribution of a randomly discounted compound Poisson process. *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 61, p. 305–310, 1996.

[Pa93] J. Paulsen. Risk theory in the stochastic economic environment. *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 46, p. 327–361, 1993.

[PR81] J. Pitman et L. Rogers. Markov functions. *Ann. Probab.*, vol. 9, p. 73–582, 1981.

[Sz03] T. Szabados et B. Székely. An exponential functional of random walks. *J. Appl. Prob.*, vol. 40, p. 413–426, 2003.

[V79] W. Vervaat. On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely random variables. *Adv. Appl. Prob.*, vol. 11, p. 750–783, 1979.

[Y92] M. Yor. Sur certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel, *Journal of Applied Probability*, vol. 29, p. 202–208, 1992. Traduction anglaise dans *Exponential Functionals of Brownian Motion and Related processes*, Springer, 2001.

3 Théorème du support pour des diffusions réfléchies de type Ventcell

Cette partie concerne l'article [3].

Soit $\mathcal{D}$ un ouvert régulier de $\mathbb{R}^{p+1}$. Considérons alors des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ bornés à dérivées bornées, β, σ_i, ν et ν_j, définis sur $\mathbb{R}^{p+1}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{p+1}$. Posons :

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1}\sigma_i^2 + \beta \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{2}\sum_{j\geq 1}\mu_i^2 + \nu,$$

les carrés étant pris au sens de l'action des champs de vecteurs.

Considérons le système suivant, où $\circ$ désigne l'intégrale au sens de Stratonovitch :

$$\left\{\begin{array}{l} dx_t = 1_{\mathcal{D}}(x_t)\,\beta(x_t)\,dt + 1_{\mathcal{D}}(x_t)\,\sum\limits_i \sigma_i(x_t)\,\circ\,dw_t^i \\ +1_{\partial\mathcal{D}}(x_t)\,\nu(x_t)\,da_t + 1_{\partial\mathcal{D}}(x_t)\,\sum\limits_j \mu_j(x_t)\,\circ\,dM_t^j \\ \forall\, t, \displaystyle\int_0^t 1_{\partial\mathcal{D}}(x_s)\,da_s = a_t \\ \forall\, t, \displaystyle\int_0^t 1_{\partial\mathcal{D}}(x_s)\,ds = 0 \\ x = x_0 \end{array}\right. \tag{31}$$

On dit que le système (31) admet une solution sur $[0,T]$ s'il existe un système de processus stochastiques (x,a,w,M) définis sur un espace probabilisé $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\bar{\mathcal{D}}})$ tel que :

1) le processus $(x_t)_{0\leq t\leq T}$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté, continu, à valeurs dans $\bar{\mathcal{D}}$;

2) le processus $(a_t)_{0\leq t\leq T}$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté, continu, croissant, nul en 0 ;

3) les processus $(w_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ sont des $(\mathcal{F}_t)$-martingales continues telles que pour tout $t \in [0,T]$:
$\forall\, i, \forall\, j, < w^i, w^j >_t = \delta_{ij}\, t,\ < M^i, M^j >_t = \delta_{ij}\, a_t,\ < w^i, M^j >_t = 0$;

4) le système (31) est vérifié sur $[0,T]$.

Sous certaines hypothèses techniques (la frontière de $\mathcal{D}$ est uniformément non caractéristique et le champ ν est transversal à $\partial\mathcal{D}$), le système (31) admet une solution unique en loi, appelée une (A,L)-diffusion (cf. [Ca97], [Ca91], et [3] pages 197 et suivantes). Le processus (a_t) est alors le temps local de (x_t) au bord de $\mathcal{D}$.

Considérons maintenant l'équation déterministe associée au système (31) pour une fonction $H = (h,\gamma)$ appartenant à $\mathcal{C}^2_M([0,T], \mathbb{R}^{d+m})$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^{d+m}$.

$$
(32) \qquad \begin{cases} x_t^{H,x} = x + \int_0^t (\beta(x_s^{H,x}) + \sum_i \sigma_i(x_s^{H,x})\,\dot{h}_s^i)\,1_{\mathcal{D}}(x_s^{H,x})\,ds \\ + \int_0^t (\nu(x_s^{H,x}) \;+\; \sum_j \mu_j(x_s^{H,x})\,\dot{\gamma}_s^j)\,1_{\partial\mathcal{D}}(x_s^{H,x})\,da_s^{H,x} \\ \forall\, t \in [0,T],\ \int_0^t 1_{\partial\mathcal{D}}(x_s^{H,x})\,da_s^{H,x} = a_t^{H,x} \\ \forall t\, \in [0,T],\ \int_0^t 1_{\partial\mathcal{D}}(x_s^{H,x})\,ds = 0, \\ \text{où } \dot{h} \text{ et } \dot{\gamma} \text{ désignent les dérivées de } h \text{ et de } \gamma. \end{cases}
$$

Le résultat principal démontré dans [3] est le suivant :

Proposition 21.
Si $\mathbb{P}_x$ désigne la loi du couple issu de x, $(x_t, a_t)_{0\le t\le T}$, sur $\mathcal{C}^0([0,T]; \bar{\mathcal{D}} \times \mathbb{R}_+)$ muni de la norme uniforme sur $[0,T]$, on a :

$$
supp\, \mathbb{P}_x = \overline{\{(x_t^{H,x}, a_t^{H,x})_{0\le t\le T}; H \in \mathcal{C}^2_M([0,T], \mathbb{R}^{d+m})\}}.
$$

Ce résultat donne en particulier une interprétation simple des termes martingales au bord M^j qui apparaissent comme des termes de réflexion aléatoires “indépendants” en un certain sens des termes w^i. Comme toujours dans les problèmes de support, la démonstration se fait par double inclusion. La difficulté ici, tient bien sûr à l'apparition des termes martingales au bord. La démonstration de Doss et Priouret [DP82] pour le cas de diffusions réfléchies sans termes martingales au bord, utilise un principe de contraction dû à Anderson et Orey [AO76] qui donne les processus (x_t) et (a_t) comme images, par des applications lipschitziennes, d'un processus de diffusion ordinaire. La présence, dans notre cas, de termes martingales sur le bord, rend inapplicable ce procédé. La méthode consiste donc à étudier le problème directement, comme dans le cas non réfléchi de Stroock et Varadhan [SV72], mais cette fois, avec deux échelles de temps, les contrôles des termes gérés par le temps local étant bien sûr les plus délicats.

L'article est découpé en trois parties. Dans la première, comme souvent pour les diffusions réfléchies, on étudie d'abord le cas dit “d'un demi-espace sans terme de dérive”, où $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$ est un demi-espace, et où le système (31) est de la forme :

$$
(33) \qquad \begin{cases} dz_t = dB_t + da_t \\ dy_t = X_0(x_t)\,dt + X_1(x_t) \circ dw_t + V_0(y_t)\,da_t + V_1(y_t) \circ dw^*_{a_t} \\ x_t = (z_t, y_t),\ z_t \ge 0,\ y_t \in \mathbb{R}^p, \\ \text{où } B,\ w \text{ et } w^* \text{ sont des mouvements browniens indépendants.} \end{cases}
$$

On construit d'abord $(z_., a_.)$ comme solution d'une équation de réflexion indépendante des mouvements browniens w et w^* qui interviennent dans l'équation régissant (y_t). La première coordonnée (z_t) est alors un mouvement brownien réfléchi et on peut conditionner par rapport à la tribu engendrée par B afin de construire $y_.$. Pour montrer la première inclusion, on met en évidence une suite de fonctions $(H_k)_{k\geq 1}$ de $\mathcal{C}^2_M([0,T],\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}_x[\, ||x - x^{H_k,x}||_T + ||a - a^{H_k,x}||_T > \varepsilon\,] = 0.$$

On choisit l'approximation dyadique classique pour approcher les mouvements browniens w et B ainsi que l'approximation du temps local qui lui est associée. Mais il en faut une autre pour approcher la partie martingale au bord w^*_a. Des techniques d'intégration par parties essentiellement, permettent de contrôler les différents termes : accroissement du temps local d'un mouvement brownien et de son approximation, intégrales de Stieltjes par rapport au temps local et à son approximation.
Puis on étudie le cas d'un demi-espace avec terme de dérive sur la première coordonnée (z_t). On démontre alors au passage dans ce cas, l'existence et l'unicité d'une solution sur $[0,T]$ au système déterministe (32) au moyen d'un argument de point fixe ([3], §I.2.A).

La deuxième partie traite de l'autre inclusion, mais toujours dans le cas du demi-espace, pour lequel on montre que :

$$\forall\, H \in \mathcal{C}^2_M([0,T],\mathbb{R}^n),\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}_x[\, ||x - x^{H,x}||_T + ||a - a^{H,x}||_T < \varepsilon\,] > 0.$$

Là encore les majorations sont obtenues à partir d'intégrations par parties, et font apparaître de "nouveaux" termes "croisés".

La troisième partie traite du cas général. La difficulté pour construire la (A,L)-diffusion vient du fait que l'on ne peut construire de solutions fortes, comme dans le cas du demi-espace. On construit alors des solutions locales grâce à des difféomorphismes et à une famille de cartes locales qui nous ramènent au cas du demi-espace avec terme de dérive. Il faut ensuite procéder à des recollements en loi, ce qui est possible car le phénomène d'oscillation ne se produit pas (seul un nombre presque sûrement fini de cartes locales est visité durant l'intervalle de temps $[0,T]$). La solution déterministe du problème (32) se construit de façon analogue. La suite est assez technique. On utilise les résultats obtenus dans le cas d'un demi-espace avec dérive dans chaque carte locale pour obtenir le résultat général.

Références

[AO76] R. F. Anderson et S. Orey. Small random perturbations of dynamical systems with reflecting boundary. *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 60, p. 189–216, 1976.

[Ca97] P. Cattiaux. Régularité au bord pour les densités conditionnelles d'une diffusion réfléchie hypoelliptique. *Stochastics*, vol. 20, p. 309–340, 1987.

[Ca91] P. Cattiaux. Calcul stochastique et opérateurs dégénérés du second ordre. I. Résolvantes, théorèmes de Hörmander et applications. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 114 (4), p. 421–462, 1990. II. Problèmes de Dirichlet. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 115 (1), p. 81–122, 1991.

[DP82] H. Doss et P. Priouret. Support d'un processus de réflexion. *Zeit. Für. Wahr.*, vol. 61, p. 327–345, 1982.

[SV72] D. W. Stroock et S. R. S. Varadhan. On the support of diffusion processes with application to the strong maximum principle. Proceedings Sixth Berkeley Symposium Math. Statistic. Probability III, University California Press Berkeley, p. 333–359, 1972.

4 Retournement du temps et diffusions de Nelson

Cette partie concerne les travaux [4] et [D1].

Les problèmes auxquels nous nous intéressons sont les suivants. Soient A le générateur d'une diffusion dans $\mathbb{R}^d$, β un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^d$, et $(\nu_t)_{t\in[0,1]}$ un flot faiblement continu de probabilités définies sur $\mathbb{R}^d$, qui satisfont à l'équation de Fokker-Planck (faible) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\nu_t = (A+\beta\nabla)^*\nu_t,$$

c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)$,

$$\forall 0\leq u\leq t\leq T,\quad \int f(t,x)\,\nu_t(dx) - \int f(u,x)\,\nu_u(dx) = \int_u^t \int \left(\frac{\partial}{\partial s} + A + \beta\nabla\right) f(s,x)\,ds\,d\nu_s(x).$$

Existe-t-il une diffusion de générateur $(A+\beta\nabla)$ et de marginales $(\nu_t)_{t\in[0,1]}$? Si elle existe, quelles sont ses propriétés et comment peut-on décrire le processus retourné ?
Le problème vient à l'origine de la mécanique stochastique de Nelson ([Ne67], [Ne88]). Considérons en effet l'équation de Schrödinger classique dans $\mathbb{R}^d$:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\triangle\psi + V\psi,$$

où $\triangle$ désigne le Laplacien dans $\mathbb{R}^d$ et V est une "bonne" fonction. Alors, dès que la condition initiale satisfait $\int|\psi(0,x)|^2\,dx = 1$, les fonctions $\rho(t,x)\equiv|\psi(t,x)|^2$ constituent un flot de densités de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. De plus, si l'on décompose $\psi = \exp(R+iS)$ suivant son amplitude et sa phase, et si l'on pose $\beta\equiv\nabla S+\nabla R$ et $\hat\beta\equiv\nabla S-\nabla R$, alors ρ satisfait aux équations faibles de Fokker-Planck (c'est-à-dire au sens des distributions) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = (\dfrac{1}{2}\triangle+\beta\nabla)^*\rho = \dfrac{1}{2}\triangle\rho - \nabla(\beta\rho) \\[2ex] -\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = (\dfrac{1}{2}\triangle-\hat\beta\nabla)^*\rho = \dfrac{1}{2}\triangle\rho + \nabla(\hat\beta\rho). \end{cases}$$

Le problème de la mécanique stochastique de Nelson est alors de montrer qu'il existe au moins une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{C}^o([0,1],\mathbb{R}^d)$ telle que, en désignant par R l'opérateur de retournement du temps :
- $\mathbb{Q}$ est la loi d'une diffusion de générateur $\frac{1}{2}\triangle+\beta\nabla$ admettant pour marginales $(\rho(t,.)dx; 0\leq t\leq 1)$;
- la loi $\overline{\mathbb{Q}}\equiv\mathbb{Q}\circ R$ du processus retourné est encore une diffusion de générateur $\frac{1}{2}\triangle-\hat\beta\nabla$ et de marginales $(\rho(1-t,.)dx; 0\leq t\leq 1)$.

E. Carlen a tout d'abord étudié ce problème en utilisant une approche semi-groupe ([C84]), des conditions de régularité sur ρ, ainsi que

- la condition d'énergie finie : $\int_0^1 \int |\beta(s,x)|^2 \, \rho(s,x) \, dxds < +\infty$;

- et la condition duale : $\int_0^1 \int |\hat{\beta}(s,x)|^2 \, \rho(1-s,x) \, dxds < +\infty$.

Ensuite, reconnaissant des conditions entropiques dans les deux conditions d'énergie finie qui précèdent, H. Föllmer ([F86]) introduit une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{C}^o([0,1],\mathbb{R}^d)$, d'entropie finie par rapport à la mesure de Wiener $\mathbb{P}$: $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\ln \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] < +\infty$. Sans autre hypothèse que celle d'énergie finie (c'est-à-dire en particulier sans hypothèse sur la régularité des drifts), il montre que la loi du processus canonique des coordonnées $(x_t)_{0 \leq t \leq 1}$ sous $\mathbb{Q}$ est absolument continue, et que sa densité par rapport à $\mathbb{P}$, notée $\rho_t(x)$, satisfait à l'équation dite de dualité. En outre, il décrit les drifts "en avant" (forward) et "en arrière" (backward) comme dérivées du processus des coordonnées.

Citons plusieurs auteurs qui ont étudié des problèmes analogues : M. Fukushima et M. Takeda ([FT84]), R. Carmona ([C85]), P. A. Meyer et W. A. Zheng ([MZh85]), J. Picard ([Pi85]), W. A. Zheng ([Zh85]), É. Pardoux et R. J. Williams ([PW94]), sans oublier M. Thieullen et J. C. Zambrini ([TZ97]) qui s'intéressent aux équations de Schrödinger via l'approche des processus réversibles due à B. Jamison.

Un certain nombre de nos travaux ([T], [4], [D1]) ont pour but d'étendre les résultats de E. Carlen et de H. Föllmer dans différents cas. À chaque fois, on adapte la méthode de H. Föllmer. Il faut d'abord étudier attentivement le processus retourné. Plusieurs auteurs se sont penchés sur ce type de problème, comme par exemple de savoir si le retourné d'une diffusion est encore une diffusion ([A82], [Pa85], [HP86], [MNS89]), ou si le retourné d'une semi-martingale est encore une semi-martingale ([W82], [JP88]), ou encore ce qui se passe pour le retourné d'une diffusion réfléchie ([Ca88]). Mais pour notre étude, nous avons besoin d'expliciter tous les processus qui interviennent dans l'équation satisfaite par le processus retourné, ce qui nécessite un important travail supplémentaire dans le cas d'une diffusion réfléchie par exemple. Ensuite, on cherche à obtenir une formule d'intégration par parties pour en déduire l'existence d'une densité régulière et l'équation de dualité à laquelle elle satisfait. Enfin, on récupère les drifts comme dérivées forward et backward du processus des coordonnées.

Tout d'abord, dans [T], nous étudions le cas où $\mathbb{P}$ est la loi d'une diffusion réelle de générateur $\frac{1}{2}a(x) \triangle + b(t,x)\nabla$, où b et a sont des fonctions de classe $\mathcal{C}_b^\infty$, le coefficient de diffusion a pouvant être dégénéré (dans [T], le drift noté habituellement $\overline{\beta}$ est curieusement noté $-\overline{\beta}$). Dans [D1], on étudie le cas de la diffusion dans $\mathbb{R}^d$ en diminuant autant que faire se peut les conditions de régularité des coefficients. Plus précisément, on se donne σ et b respectivement une matrice $d \times m$ et un champ de vecteurs d-dimensionnel définis sur $[0,1] \times \mathbb{R}^d$, uniformément lipschitziens, et à croissance au plus linéaire, c'est-à-dire tels qu'il existe une constante $K > 0$ vérifiant :

$$\sup_{t \in [0,1]} \left(|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \right) \leq K \, |x-y|,$$

et
$$\sup_{t\in[0,1]}\left(|\sigma(t,x)|+|b(t,x)|\right)\leq K\,(1+|x|).$$
Soit $\mathbb{P}$ la loi de la diffusion de générateur $A_t=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}(t,x)\partial^2_{ij}+\sum_i b_i(t,x)\partial_i$, où, bien sûr, $a=\sigma\sigma^*$. On munit $\Omega\equiv\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^d)$ de la probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que la loi $\mu_t(dx)$ du processus des coordonnées $(x_s; 0\leq s\leq 1)$ sous $\mathbb{P}$ vérifie :
$$\forall\, t>0,\ \mu_t(dx)=p_t(x)\,dx,\ \text{avec}\ \ div(a(t,x)\,p_t(x))\in L^1_{loc}(dt\times dx),$$
où $div(a(t,x)\,p_t(x))$ désigne le champ de vecteur $\left(\sum_j\partial_j(a_{ij}\,p)\right)_{1\leq i\leq d}$.

Proposition 22. ([HP86], Théorème 2.1, ou [MNS89], Théorème 2.3)
Sous ces hypothèses, $\overline{\mathbb{P}}\equiv\mathbb{P}\circ R$ *est sur* $\overline{\Omega}\equiv\mathcal{C}([0,1[,\mathbb{R}^d)$*, la loi d'une diffusion de générateur*
$$\overline{A}_t\equiv\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}(t,x)\,\partial^2_{ij}+\sum_i b_i(t,x)\,\partial_i,$$
où $\overline{a}(t,x)=a(1-t,x)$ *et* $\overline{b}(t,x)=-b(1-t,x)+\frac{div(a(1-t,x)\,p_{1-t}(x))}{p_{1-t}(x)}\,1_{(p_{1-t}(x)\neq0)}$.

Afin de pouvoir appliquer la théorie de la transformation de Girsanov, il nous faut supposer de plus que $\overline{\mathbb{P}}$ est une solution extrémale au problème de martingale associé à $\overline{A}_t$. Soit alors une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ d'entropie finie par rapport à $\mathbb{P}$: $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]<+\infty$. Comme l'entropie est invariante par toute transformation mesurable, en particulier par retournement du temps, on a aussi : $H(\overline{\mathbb{Q}}|\overline{\mathbb{P}})=\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{Q}}}[\ln\frac{d\overline{\mathbb{Q}}}{d\overline{\mathbb{P}}}]<+\infty$.
Grâce à la théorie de la transformation de Girsanov, il existe des processus adaptés $(\beta_s)_{0\leq s\leq1}$ et $(\overline{\beta}_s)_{0\leq s\leq1}$ tels que $x_t-x_0-\int_0^t[b(s,x_s)+a(s,x_s)\beta_s]\,ds$ et $x_t-x_0-\int_0^t[\overline{b}(s,x_s)+\overline{a}(s,x_s)\overline{\beta}_s]\,ds$ soient des martingales locales respectivement sous $\mathbb{Q}$ et sous $\overline{\mathbb{Q}}$.
Par ailleurs, ces drifts sont d'énergie finie :
$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\int_0^1|\beta_s|^2\,ds]<+\infty$ et $\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{Q}}}[\int_0^1|\overline{\beta}_s|^2\,ds]=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\int_0^1|\overline{\beta}_{1-s}\circ R|^2\,ds]<+\infty$.
La loi de x_t sous $\mathbb{Q}$ notée $\nu_t=\mathbb{Q}\circ x_t^{-1}$ est alors absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire que pour tout $t\in]0,1]$, $\nu_t(dx)=\rho_t(x)\,dx=\gamma_t(x)\,p_t(x)\,dx$. Afin d'obtenir une formule d'intégration par parties, il nous faut faire l'hypothèse supplémentaire suivante : $(t,x_t)\in L^1_{loc}(dt\times d\mathbb{Q})$. Voir [D1] pour des conditions suffisantes pour réaliser cette condition.
Nous avons obtenu la formule d'intégration par parties suivante :

Proposition 23. ([D1], Proposition 3.1)
Sous les hypothèses précédentes, on a, pour presque tout $t\in]0,1]$*, et pour toutes fonctions* f *et* ϕ *de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *:*
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[{}^t\nabla\phi(x_t)\,a(t,x_t)\,\nabla f(x_t)]=-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(x_t)\,{}^t\nabla\phi(x_t)\,\{\frac{div(ap)}{p}(t,x_t)+a(t,x_t)(\beta_t+\overline{\beta_{1-t}}\circ R)\}].$$

On en déduit, en appliquant cette formule à une fonction ϕ bien choisie :

Proposition 24. ([D1], Corollaire 3.3)
Sous les hypothèses précédentes, on a, que, pour presque tout $t \in]0,1]$

$$a(t,.)\nabla\rho_t = \rho_t\, a(t,.)\{\frac{\nabla p_t}{p_t} + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\overline{\beta}_{1-t}\circ R + \beta_t \,/\, x_t = .]\}$$

appartient à l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et $a(.,.)\nabla\rho_. \in L^1_{loc}(]0,1[\times\mathbb{R}^d, dt\otimes dx)$.

On peut aller plus loin suivant les cas (caractère markovien de $\mathbb{Q}$, existence d'un inverse pour a, ...). Moyennant quelques hypothèses supplémentaires d'intégrabilité des coefficients, on retrouve aussi les drifts (les drifts $a(t,x_t)\,\beta_t$ et $a(1-t,x_t)\overline{\beta}_{1-t}\circ R$ qui sont les véritables drifts ici, et non β_t et $\overline{\beta}_t$) comme dérivées forward et backward du processus des coordonnées.

Parallèlement, dans [4], on étudie cette fois le cas où Ω est l'ensemble $\mathcal{C}^o([0,1],\mathbb{R}_+)$ de processus canonique $(z_s)_{0\le s\le 1}$, et où $\mathbb{P}$ est la loi d'un mouvement brownien réfléchi de densité $p(s,z)$ par rapport à la mesure de Lebesgue (cas déjà ébauché dans [T]). La méthode pour étudier le processus retourné et mettre en évidence les "martingales de base" sous $\mathbb{P}$ et sous $\overline{\mathbb{P}}$ notées respectivement M_t et $\overline{M}_t$, s'appuie sur celle décrite par É. Pardoux dans [Pa85] et [HP86]. Bien sûr, l'apparition d'un temps local complique grandement les choses.

Proposition 25. ([4], Lemme 2.1 et Propositions 2.3 et 2.5)
Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, d'entropie relative finie : $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) < +\infty$. Notons $(\beta_s)_{0\le s\le 1}$ et $(\overline{\beta}_s)_{0\le s\le 1}$ les drifts forward et backward, c'est-à-dire les processus prévisibles tels que $M_t - \int_0^t \beta_s ds$ et $\overline{M}_t - \int_0^t \overline{\beta}_s ds$ soient des $\mathcal{G}_t$-mouvements browniens, respectivement sous $\mathbb{Q}$ et sous $\overline{\mathbb{Q}}$, M_t et $\overline{M}_t$ désignant les $\mathcal{G}_t$-mouvements browniens "de base", respectivement sous $\mathbb{P}$ et sous $\overline{\mathbb{P}}$.
Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^*_+)$ et tout $t \in]0,1]$, on a :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f'(z_t)] = -\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(z_t)\left(\beta_t + \overline{\beta}_{1-t}\circ R + \frac{\frac{\partial}{\partial z}p(t,z_t)}{p(t,z_t)}\right)]. \tag{34}$$

On en déduit que, pour presque tout $t \in]0,1]$, la loi de z_t sous $\mathbb{Q}$ admet une densité par rapport à $\mathbb{P}$ notée ρ_t, et que celle-ci vérifie l'équation de dualité :

$$\frac{\rho_t'(z)}{\rho_t(z)} \overset{\text{p.p.}}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\overline{\beta}_{1-t}\circ R + \beta_t \,/\, z_t = z] \tag{35}$$

Les drifts β et $\overline{\beta}$ peuvent encore être obtenus par dérivées forward et backward du processus canonique, mais là encore, l'apparition du temps local oblige à des contrôles très précis :

Proposition 26. ([4], Proposition 2.15)
$\lim_{h\searrow 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1_{(z_t>0)}\frac{z_{t+h}-z_t}{h} \,/\, \sigma(z_s; 0 \leq s \leq t)] \overset{\text{p.s.}}{=} 1_{(z_t>0)}\, \beta_t.$
$\lim_{h\searrow 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1_{(z_t>0)}\frac{z_t - z_{t-h}}{h} \,/\, \sigma(z_s; t \leq s \leq 1)] \overset{\text{p.s.}}{=} -1_{(z_t>0)} \left(\overline{\beta}_{1-t} oR + \frac{\frac{\partial}{\partial z}p(1-t,z_t)}{p(1-t,z_t)}\right).$

Puis, toujours dans [4], on traite le cas d'une diffusion réfléchie dans un demi-espace, de sorte que sa première composante soit un mouvement brownien réfléchi. Moyennant quelques hypothèses techniques sur les coefficients de la diffusion et sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue, on obtient là encore l'équation du processus retourné puis une formule d'intégration par parties ([4], Proposition 3.2).

Références

[A82] B. D. O. Anderson. Reverse-time diffusion equation models. *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 12 (3), p. 313–326, 1982.

[C84] E. Carlen. Conservative diffusions. *Comm. Math. Phys.*, vol. 94, n° 3, p. 293–315, 1984.

[C85] R. Carmona. Probabilistic construction of Nelson processes. *Tanigushi Symp. PMMP Katata*, p. 55–81, 1985.

[Ca88] P. Cattiaux. Time reversal of diffusion processes with a boundary condition. *Stoch. Proc. Appl.*, vol. 28, p. 275–292, 1988.

[F86] H. Föllmer. Time reversal on Wiener space. Stochastic processes, mathematics and physics (Bielefeld, 1984). Lecture Notes in Math., vol. 1158, p. 119–129, Springer, Berlin, 1986.

[FT84] M. Fukushima et M. Takeda. A transformation of a symmetric Markov process and the Donsker-Varadhan theory. *Osaka Journal Math.*, vol. 21, p. 311–326, 1984.

[HP86] U. G. Haussmann et É. Pardoux. Time reversal of diffusions. *Ann. Probab.*, vol. 14 (4), p. 1188–1205, 1986.

[JP88] J. Jacod et Ph. Protter. Time reversal on Lévy processes. *Ann. Probab.*, vol. 16 (2), p. 620–641, 1988.

[MZh85] P. A. Meyer et W. A. Zheng. Construction de processus de Nelson réversibles. *Séminaire de probabilités*, vol. XIX, 1983/84, p. 12–26, Lecture Notes in Math., 1123, Springer, Berlin, 1985.

[MNS89] A. Millet, D. Nualart et M. Sanz. Time reversal for infinite dimensional diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, vol. 82, p. 315–347, 1989.

[Ne67] E. Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion.* Princeton University Press, 1967.

[Ne88] E. Nelson. École d'été de Probabilités de Saint-Flour. Lecture Notes in Math., vol. 1362, p. 428–450, Springer, Berlin, 1988.

[Pa85] É. Pardoux. Grossissement d'une filtration et retournement du temps. *Séminaire de Probabilités XX*, Lecture Notes in Math., vol. 1204, p. 48–55, Springer, Berlin, 1985.

[PW94] É. Pardoux et R. J. Williams. Symmetric reflected diffusions. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 30, p. 13–62, 1994.

[Pi85] J. Picard. Une classe de processus stable par retournement du temps. *Séminaire de Probabilités XX*, Lecture Notes in Math., vol. 1204, p. 56–69, Springer, Berlin, 1985.

[TZ97] M. Thieullen et J. C. Zambrini. Symmetries in the stochastic calculus of variations. *Probability Theory and Related Fields*, vol. 107, p. 401–4278, 1997.

[W82] J. Walsh. A non reversible semi-martingale. *Séminaire de Probabilités XVI*, Lecture Notes in Math., vol. 920, p. 212, Springer, Berlin, 1982.

[Za86] J. C. Zambrini. Variational processes and stochastic versions of mechanics. *J. Math. Phys.*, vol. 27 (9), p. 2307–2330, 1986.

[Zh85] W. A. Zheng. Tigthness results for law of diffusion processes ; application to stochastic mechanics. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 21, p. 103–124, 1985.

5 Travaux en cours et perspectives de recherche

Nous présentons à présent quelques thèmes que j'aimerais développer par la suite.

- Dans [12], nous avons étudié le processus $X_t = |C_t|$, norme d'un processus de Cauchy réel. C'est un processus de Markov semi-stable, et nous avons identifié, à l'aide de deux mouvements browniens indépendants, le processus de Lévy qui lui est associé par la transformation de Lamperti ([12], Proposition 2.3). Nous avons commencé à étudier le cas des normes de processus de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$, processus qui peuvent se représenter par subordination : $(X_t; t \geq 0) \stackrel{d}{=} (R_{\tau_t}; t \geq 0)$, où R désigne un processus de Bessel (la norme d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$) et τ_t l'inverse du temps local en 0 d'un mouvement brownien indépendant (cf. [BY87] dans le cas $n = 1$). Le cas de la dimension 3 semble accessible, son exposant de Lévy se calculant aisément. De même, nous avons commencé à regarder ce qui se passe pour la valeur absolue d'un processus α-stable symétrique. Tous ces processus sont intéressants par exemple en mathématiques financières, pour modéliser des processus de prix.

- Depuis peu, nous nous intéressons, avec Ph. Carmona au problème suivant. Étant données deux constantes positives a et c, on considère la diffusion X, solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = dB_t - cX_t \, 1_{(|X_t| \geq a)} dt,$$

où, bien sûr, B désigne un mouvement brownien standard. Nous étudions le comportement, lorsque t tend vers l'infini, de $\mathbb{E}[\exp(-A_t)]$, où $A_t \equiv \int_0^t 1_{(|X_s| \geq a)} ds$ est le temps passé par la diffusion X en dehors de l'intervalle $[-a, a]$. Plus précisément, nous cherchons à répondre à la question : $\mathbb{E}[\exp(-A_t)]$ décroît-elle comme e^{-t} quand t tend vers l'infini ? Notre intérêt pour ce problème provient d'une question posée par Florent Malrieu lors d'un exposé sur les milieux granulaires.

- Depuis l'écriture de [D1], nous nous sommes attaqués au problème de l'existence d'une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ résolvant le problème de la mécanique de Nelson. L'opérateur $\tilde{A}_t = A_t + a_t \beta_t . \nabla$ est vu comme une perturbation de $A_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(t, x) \, \partial_{ij}^2 + \sum_i b_i(t, x) \, \partial_i$, et la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ associée à $\tilde{A}_t$ est construite à partir de $\mathbb{P}$, celle associée à A_t. La rédaction de ce travail reste pour l'instant inachevée.

- En 1968, J. P. Imhof (Some invariant laws related to the arcsine law. *Ann. of Math. Stat.*, vol. 39, n° 1, p. 258–260) identifie la loi de $\int_0^\sigma 1_{(B_s > 0)} ds$, où $\sigma = \sup\{s \leq 1; S_s - B_s = 0\}$, comme étant celle d'une variable béta de paramètres $\frac{1}{2}$ et 1, et, plus généralement, il propose d'étudier la loi de $\int_0^{\sigma_c} 1_{(B_s^{(c)} > 0)} ds$, où $B_t^{(c)} \equiv B_t + ct$ est le mouvement brownien avec drift constant c, et σ_c l'unique instant où $B^{(c)}$ atteint son maximum sur $[0, 1]$. Dans [D3], nous expliquons les liens très étroits entre notre étude du μ-processus ([2], [T], [N]) et le problème posé par J. P. Imhof, et nous obtenons quelques résultats intéressants, sans complètement résoudre malheureusement la question. Il y a bien longtemps que j'aimerais reprendre ce travail à la lumière de travaux plus récents, mais, faute de temps, cela n'a pas encore été fait.

- Enfin, dans la première partie de ma thèse, j'ai obtenu les extensions de la loi de l'arc-sinus (9), (10) et (11). Si une partie du travail qui a suivi a consisté à expliquer les deux premières identités en loi, je n'ai jamais travaillé sur (11) qui concerne le processus de Bessel de dimension 3. Cela pourrait être intéressant de développer me semble-t-il.

Table des matières