Fonction Logarithme Népérien

Exercice 1

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = e^x$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs graphes dans un repère orthonormé.

1. Tracer les graphes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

2. À l'aide des graphes tracés, vérifier :
- si $a > 0$, alors $e^{\ln a} = a$; - si x est un nombre réel, alors $\ln(e^x) = x$.

3. Quelle est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 ? Tracer cette tangente.

Exercice 2

1. Simplifier : $\ln 3 + \ln 5 + \ln \frac{1}{15}$; $2\ln 5 + 3\ln 2 - \ln 7$; $e^{1+3\ln 2 - 2\ln 3}$.

2. Écrire en fonction de $\ln 2$ et en déduire le signe de $\ln 8 - 2\ln 4 - 3\ln\sqrt{2} + \ln\frac{1}{2}$.

3. Pour quelles valeurs du réel x la quantité $\ln x + \ln(x-2)$ est-elle définie ? Résoudre : $\ln x + \ln(x-2) = \ln 8$.

4. Résoudre : $\ln x \leq 1$ $\quad \ln(3x+2) > 2\ln 2$ $\quad \ln(x^2+2) > e$ $\quad 2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$

Exercice 3

Donner la dérivée des fonctions suivantes

$f_1(x) = x\ln x$ $\quad f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad f_3(x) = \ln(x^2+1)$ $\quad f_4(x) = (x^2-1)\ln x$

Exercice 4

1. Résoudre l'inéquation $\ln x < 1$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - x\ln x$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

3. En remarquant que, pour tout x tel que $\ln x \neq 0$, on a $f(x) = x\ln x\left(-1 + \frac{2}{\ln x}\right)$, déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Déterminer la valeur de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

5. Donner le tableau des variations de f.

6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on calculera.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de f en 0.

2. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$? En déduire la valeur de la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Déduire des questions précédentes les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1+2\ln x}{x^3}$.

5. Résoudre sur $]0;+\infty[$, l'inéquation $-(1+2\ln x) > 0$.

6. Donner le tableau des variations de f. Quel est le maximum de f ?

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point. Préciser les coordonnées de ce point.