Nombres complexes

Exercice 1. On pose $z_1 = 5+3i$ et $z_2 = 1-2i$. Calculer :

$\mathscr{R}e(z_1)$ $\mathscr{I}m(z_1)$ $\mathscr{R}e(z_2)$ $\mathscr{I}m(z_2)$ $\mathscr{R}e(i.z_1)$ $\mathscr{I}m(-i.z_2)$

z_1+2z_2 $2z_1-3z_2$ $z_1.z_2$ $(z_2)^2$

Si besoin, donnez-vous deux autres valeurs pour z_1 et z_2 et reprenez l'exercice.

Exercice 2. Soient les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2-i$, $z_B = -1+2i$ et $z_C = \frac{3+i}{2}$.

1. Dessiner les points A, B et C dans un repère orthonormé.
2. Déterminer l'affixe du point J milieu du segment $[AB]$.
3. On appelle D le symétrique de B par rapport à C. Déterminer l'affixe de D.
4. Déterminer l'affixe du point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. Que peut-on dire du quadrilatère $ACEB$?
5. Calculer les modules de z_A, z_B et z_C. Que peut-on dire du triangle OAB ?

Exercice 3. Soit M le point du plan d'affixe $z = 2+i$. On note M' le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses et $M"$ le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

Représenter les points M, M' et $M"$ dans un repère orthonormé.

Déterminer les affixes z' et $z"$ respectivement des points M' et $M"$. Exprimer z' et $z"$ en fonction de z.

Exercice 4.

1. Déterminer le conjugué des nombres complexes : $1-i$; $2+3i$; $1+i$; $4i-3.$; $3-2i$.
2. Déterminer, sans les mettre sous forme algébrique, le conjugué des nombres complexes :
$(1-i)(2+3i)$; $(1+i)^2(4i-3)$; $\dfrac{1+i}{3-2i}$.

Exercice 5.

1. Déterminer le module des nombres complexes suivants : i ; $2+3i$; $2+i$; $1-2i$.
2. Déterminer le module des nombres complexes (sans les mettre sous forme algébrique) : $\dfrac{1}{i}$; $\dfrac{1}{2+3i}$; $\dfrac{2+i}{1-2i}$.
3. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes : $\dfrac{1}{i}$; $\dfrac{1}{2+3i}$; $\dfrac{2+i}{1-2i}$.

Vérifier les réponses à la question précédente.

Exercice 6. Soient les points $A(0;-1)$, $B(3;0)$, $C(1;2)$ et $D(-2;1)$.

1. Déterminer les affixes des points A, B, C et D.
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z = \bar{z}$ (interpréter géométriquement)
2. $\bar{z} = \dfrac{9}{z}$ (interpréter géométriquement)
3. $(3+i)\bar{z} = \dfrac{1-i}{1+i}$
4. $(\bar{z}+1)(3+3\bar{z}-i) = 0$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2+2z=0$
2. $z^2+z+1=0$
3. $2z^2-6z+5=0$
4. $z^4+7z^2+12=0$

Exercice 9. Résoudre : $x^2+y+(y-2x)\,i=0,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$.

Exercice 10. Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

i ; $1+i$; $(1+i)^6$; $\dfrac{1}{1+i}$; $1+\sqrt{3}i$; $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$.

Exercice 11. Soit $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\,\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Mettre z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12. Soient les points $A(1;1)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ d'un plan orthonormé. On note z_A et z_B leurs affixes respectives.

1. Calculer $|z_A|$, $|z_B|$ et $|z_B-z_A|$.
2. En déduire que le triangle OAB est un triangle équilatéral.
3. *Question facultative.* Mettre le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme trigonométrique. Retrouver alors le fait que le triangle OAB est un triangle équilatéral.

Exercice 13. On considère un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\mathscr{R}e(z)=1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\mathscr{I}m(z)=1$.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1+2i|=2$.
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-i|=|z-1|$.

Exercice 14. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z)=z^4+(1-i\sqrt{3})\,z^3+64\,z+64\,(1-i\sqrt{3}).$$

1. Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle que l'on explicitera.
2. Déterminer les nombres complexes p et q tels que pout tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z)=(z^2-4\,z+16)\,(z+4)\,(p\,z+q).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.
4. On appelle A, B, C et D les points d'affixes respectives $2+2\,i\,\sqrt{3}$, $2-2\,i\,\sqrt{3}$, -4 et $-1+i\,\sqrt{3}$. Construire les points A, B, C et D.
5. Montrer que les points A, B, C sont sur un même cercle de centre O.
6. Montrer que D est le milieu de $[AC]$.
7. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.