Extrema, applications de classe C^1

I Différentiabilité

Exercice 1.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$. Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en 0 mais f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 2.— Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable en 0. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ et $t > 0$, $f(tx) = tf(x)$. Montrer que f est linéaire.

II Extrema : conditions d'ordre 1

Exercice 3.— Dessiner l'allure du graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet exactement deux minimum locaux dont l'un est un minimum, et un maximum local qui n'est pas un maximum.

Exercice 4.— Démontrer le théorème sur la condition d'ordre 1 pour les extrema libres. On pourra appliquer le théorème de Fermat en une variable, pour une fonction bien choisie.

Exercice 5.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

1. Montrer que :

- **a.** $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $|x| + |y|$ tend vers $+\infty$.
- **b.** L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq 0\}$ est compact.
- **c.** f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer ce minimum.

III Applications de classe C^1

Exercice 6.—

1. Soit $\gamma : [a,b] \to E$ une courbe de classe C^1. Expliquer pourquoi la vitesse de la courbe est bornée sur $[a,b]$. En déduire une majoration de la distance entre les deux extrémités $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

2. Soit $f : \Omega \to F$ de classe C^1, et K un compact convexe de Ω (par exemple une boule fermée). Montrer que f est lipschitzienne sur K.

Exercice 7.— Soit $f : E \to F$ une application différentiable entre deux espaces vectoriels normés. On suppose que la différentielle est constante : pour tout x, y, $Df(x) = Df(y)$. Que peut-on dire de l'application f ? *Aide : on pourra utiliser un corollaire de l'inégalité des accroissements finis.*

Exercice 8.— Dans cet exercice, on montre que si la vitesse le long d'une courbe reste proche d'un vecteur $\overrightarrow{v}$, alors la courbe reste proche de la droite parcourue à vitesse $\overrightarrow{v}$. Plus précisément, soit t un réel positif, et $\gamma : [0,t] \to F$ une application continue, on suppose que γ est dérivable sur $]0,t[$ (F est un espace vectoriel normé). Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de F, et M un réel tel que

$$\forall s \in [0,t], \|\gamma'(s) - \overrightarrow{v}\| \leq M.$$

Montrer l'inégalité

$$\|\gamma(t) - (\gamma(0) + t.\overrightarrow{v})\| \leq M\,|t| \quad (\star).$$

III.1 Théorème d'inversion locale

Exercice 9.— Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (y, x + \cos(y))$ est un C^1-difféomorphisme.

Exercice 10.—Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (2x+y, x^2 - y^2)$. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant le point $(2,1)$ tel que la restriction $g_{|U} : U \to g(U)$ est un C^1-difféomorphisme.

Exercice 11.—

1. L'application $M \mapsto M^2$ est-elle un C^1-difféomorphisme de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées dans lui-même ?

2. a. Calculer la différentielle de l'application $M \mapsto M^2$ en un point M_0 quelconque. **b.** Montrer que toute matrice N assez proche de l'identité est le carré d'une unique matrice M proche de l'identité. *On pourra commencer par traduire précisément cette phrase, en introduisant les quantificateurs appropriés.*

3. On note $\sqrt{N}$ la matrice M de la première question. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $\sqrt{Id + H}$ lorsque H tend vers 0. *On pourra calculer simplement la différentielle de $M \mapsto \sqrt{M}$ en l'identité.*

Exercice 12.— On se place dans l'espace vectoriel normé $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.

1. Montrer que l'application $f \mapsto f^2$ n'est pas un C^1-difféomorphisme sur son image.

2. Montrer qu'elle n'est pas un C^1-difféomorphisme sur aucun voisinage de la fonction nulle.

3. Montrer que, par contre, sa restriction à l'ouvert des fonctions strictement positives est un difféomorphisme (on pourra relire le paragraphe sur la différentielle de cette application dans le mémo).

III.2 Théorème des fonctions implicites

Exercice 13.—

1. Montrer que l'équation
$$-\sin(y) + x + \cos(xy) = 0$$
définit localement y comme une fonction de x au voisinage du point $(-1, 0)$.

2. Calculer la dérivée de cette fonction en $x = -1$.

Exercice 14.— On considère l'équation
$$z^2 e^{zx} + 2zy^2 - 1 = 0.$$

1. Trouver toutes les solutions du type $(0, 0, z)$.

2. Montrer que l'équation définit localement z comme une fonction $z = \phi(x, y)$ au voisinage de la solution $(0, 0, 1)$.

3. En dérivant la relation $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, calculer les dérivées partielles de φ au point $(0, 0)$.

4. En déduire une valeur approchée d'une solution avec $x = 0,03$ et $y = -0,04$ (si elle existe...).

Exercice 15.— On considère l'intersection de la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avec le cylindre d'axe vertical passant par le point $(1, 0, 0)$ et de rayon 1, qui a pour équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

1. Montrer que le système des deux équations détermine localement y et z en fonction de x, sauf en quatre points à déterminer.

2. Esquisser le dessin de cette intersection et interpréter graphiquement le résultat du calcul.

Exercice 16.—

1. Montrer que l'équation matricielle $M^3 + N^3 - 3MN = \mathrm{Id}$ définit localement N en fonction de M au voisinage du couple solution $(\mathrm{Id}, 0)$. Autrement dit, pour toute matrice M dont les coefficients assez proches de ceux de l'identité, il existe une unique matrice $N = \Phi(M)$ dont les coefficients sont proches de 0, telle que $M^3 + N^3 - 3MN = \mathrm{Id}$.

2. Calculer la différentielle de l'application Φ au point Id, et écrire le développement limité à l'ordre 1 en ce point.

Exercice 17.— *Dans cet exercice on se demande comment les racines d'un polynôme varient en fonction des coefficients. Pour simplifier, on se restreint aux polynômes de degré 3 (mais la même démarche fonctionne en degré plus grand, et produit un résultat analogue).*

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $P_{a,b,c}(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.

1. On se donne $(a_0, b_0, c_0, x_0) \in \mathbb{R}^4$ et on suppose que x_0 est une racine du polynôme $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$. Trouver une condition suffisante pour qu'il existe un voisinage ouvert U de (a_0, b_0, c_0) et une application $\mathcal{X}_0 : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que
$$\mathcal{X}_0(a_0, b_0, c_0) = x_0 \quad \text{et} \quad P_{a,b,c}(\mathcal{X}_0(a, b, c)) = 0 \quad \forall (a, b, c) \in U.$$

2. *(optionnelle et difficile)* Montrer que cette condition est aussi nécessaire.

3. Soit $\Omega = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, P_{a,b,c}(X)$ a trois racines réelles distinctes$\}$

a. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer que $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \mapsto (x,y,z)$ où $x < y < z$ sont les racines (distinctes) de $P_{a,b,c}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur l'ouvert $\{(x,y,z) \mid x < y < z\}$ de $\mathbb{R}^3$.
