Théorème de la moyenne, applications de classe C^1, théorème d'inversion locale

I Assimilation du cours

Exercice 1.— Soit $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur une partie ouverte U de E. Soit $K \subset U$ une partie compacte et convexe (par exemple une boule fermée). Montrer que f est lipschitzienne K.

Exercice 2.— Soit $f : E \to F$ une application différentiable entre deux espaces vectoriels normés. On suppose que la différentielle est constante : pour tout x, y, $Df(x) = Df(y)$. Que peut-on dire de l'application f ?

II Exercices de niveau attendu

Exercice 3.— Dans cet exercice, on montre que si la vitesse le long d'une courbe reste proche d'un vecteur $\overrightarrow{v}$, alors la courbe reste proche de la droite parcourue à vitesse $\overrightarrow{v}$. Plus précisément, soit t un réel positif, et $\gamma : [0, t] \to F$ une application continue, on suppose que γ est dérivable sur $]0, t[$ (F est un espace vectoriel normé). Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de F, et M un réel tel que $\forall s \in [0, t], \|\gamma'(s) - \overrightarrow{v}\| \leq M.$. Montrer l'inégalité

$$\|\gamma(t) - (\gamma(0) + t.\overrightarrow{v})\| \leq M\,|t| \quad (\star)$$

Exercice 4.— **1.** Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, x + \sin y)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

2. Dessiner l'image par f du carré $[0; 2\pi]^2$.

Exercice 5.—

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. En quels points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la différentielle $Df(x, y)$ est-elle inversible ?

3. Déterminer et dessiner l'image par f de la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

4. **a.** Montrer que les ensembles $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$ et $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ ont même image par f et déterminer W.

b. Montrer que $f_{|U}$ et $f_{|V}$ sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$ sur W et expliciter leurs fonctions réciproques.

c. Calculer la différentielle de $(f_{|U})^{-1}$ et $(f_{|V})^{-1}$.

Exercice 6.—Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (2x+y, x^2-y^2)$. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant le point $(2,1)$ tel que la restriction $g_{|U} : U \to g(U)$ est un C^1-difféomorphisme.

Exercice 7.— **1.** Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Quelle est l'image de f ?

3. Montrer que l'on peut appliquer le théorème d'inversion locale en tout point (x,y).

4. L'application f est-elle un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8.—

1. L'application $M \mapsto M^2$ est-elle un C^1-difféomorphisme de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées dans lui-même ?

2. **a.** Calculer la différentielle de l'application $M \mapsto M^2$ en un point M_0 quelconque.

b. Montrer que toute matrice N assez proche de l'identité est le carré d'une unique matrice M proche de l'identité. *On pourra commencer par traduire précisément cette phrase, en introduisant les quantificateurs appropriés.*

3. On note $\sqrt{N}$ la matrice M de la première question. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $\sqrt{Id+H}$ lorsque H tend vers 0. *On pourra calculer simplement la différentielle de* $M \mapsto \sqrt{M}$ *en l'identité.*

Exercice 9.— On se place dans l'espace vectoriel normé $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.

1. Montrer que l'application $f \mapsto f^2$ n'est pas un C^1-difféomorphisme sur son image.

2. Montrer qu'elle n'est pas un C^1-difféomorphisme sur aucun voisinage de la fonction nulle.

3. Montrer que l'ensemble $E_{>0}$ des fonctions $f \in E$ strictement positives est ouvert dans E et que $\Phi_{|E_{>0}}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $E_{>0}$.

Exercice 10.—

1. Montrer que l'équation

$$-\sin(y) + x + \cos(xy) = 0$$

définit localement y comme une fonction de x au voisinage du point $(-1, 0)$.

2. Calculer la dérivée de cette fonction en $x = -1$.

Exercice 11.— On considère l'équation

$$z^2 e^{zx} + 2zy^2 - 1 = 0.$$

1. Trouver toutes les solutions du type $(0,0,z)$.

2. Montrer que l'équation définit localement z comme une fonction $z = \phi(x,y)$ au voisinage de la solution $(0,0,1)$.

3. En dérivant la relation $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, calculer les dérivées partielles de φ au point $(0,0)$.

4. En déduire une valeur approchée d'une solution avec $x = 0,03$ et $y = -0,04$ (si elle existe...).

Exercice 12.— On considère l'intersection de la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ avec le cylindre d'axe vertical passant par le point $(1,0,0)$ et de rayon 1, qui a pour équation $(x-1)^2+y^2=1$.

1. Montrer que le système des deux équations détermine localement y et z en fonction de x, sauf en quatre points à déterminer.

2. Esquisser le dessin de cette intersection et interpréter graphiquement le résultat du calcul.

Exercice 13.—

1. Montrer que l'équation matricielle $M^3+N^3-3MN=\mathrm{Id}$ définit localement N en fonction de M au voisinage du couple solution $(\mathrm{Id},0)$. Autrement dit, pour toute matrice M dont les coefficients assez proches de ceux de l'identité, il existe une unique matrice $N=\Phi(M)$ dont les coefficients sont proches de 0, telle que $M^3+N^3-3MN=\mathrm{Id}$.

2. Calculer la différentielle de l'application Φ au point Id, et écrire le développement limité à l'ordre 1 en ce point.

Exercice 14.— *Dans cet exercice on se demande comment les racines d'un polynôme varient en fonction des coefficients. Pour simplifier, on se restreint aux polynômes de degré 3 (mais la même démarche fonctionne en degré plus grand, et produit un résultat analogue).*

Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on pose $P_{a,b,c}(X)=X^3+aX^2+bX+c$.

1. On se donne $(a_0,b_0,c_0,x_0)\in\mathbb{R}^4$ et on suppose que x_0 est une racine du polynôme $P_0(X)=X^3+a_0X^2+b_0X+c_0$. Trouver une condition suffisante pour qu'il existe un voisinage ouvert U de (a_0,b_0,c_0) et une application $\mathcal{X}_0:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que

$$\mathcal{X}_0(a_0,b_0,c_0)=x_0 \quad \text{et} \quad P_{a,b,c}(\mathcal{X}_0(a,b,c))=0 \quad \forall (a,b,c)\in U.$$

2. *(optionnelle et difficile)* Montrer que cette condition est aussi nécessaire.

3. Soit $\Omega=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid P_{a,b,c}(X) \text{ a trois racines réelles distinctes}\}$

a. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer que $\Theta:\Omega\to\mathbb{R}^3$, $(a,b,c)\mapsto(x,y,z)$ où $x<y<z$ sont les racines (distinctes) de $P_{a,b,c}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur l'ouvert $\{(x,y,z)\mid x<y<z\}$ de $\mathbb{R}^3$.